Cornelius Lanczos

解析力学と変分原理

高橋　康——監訳
一柳正和———訳

THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF MECHANICS

日刊工業新聞社

あなたの父から引き継ぐもの，
それを手にするために，働いてそれを獲たまえ
ゲーテ

A. Einsteinに捧げる

THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF MECHANICS

FOURTH EDITION

by

CORNELIUS LANCZOS

監訳者のことば

一柳博士がここにランチョス先生の“The Variational Principles of Machanics”を翻訳して下さったことは，日本の学会にとって大変喜ばしいことだと思う．私がダブリン高等科学研究所に奉職中，ランチョス先生には直接いろいろと物理学の手ほどきをしていただいた．先生は物理学だけでなく人間の文化のあらゆる分野に造詣の深い，チャーミングとしかいいようのない方である．

この翻訳を手にされた方は，ランチョス先生の高ぶらない謙虚なアプローチにまず親しみを感じられることであろう．先生は教壇の上から聴衆に講義をするという態度ではなく，読者の手をとって十九世紀の数学者が確立した自然科学の奥深い世界に案内して下さる．いろいろな数学的な操作についても，その哲学的物理的意味がこのように懇切丁寧に解説されている力学の本は他に見当たらないだろう．さっと読んでしまわずに，ゆっくりと一語一語じっくりと観賞しながら進んでいかれることを望む．

1992年3月

エドモントンにて　高橋　康

訳者の序

Cornelius Lanczos の名著；The Variational Principle of Mechanics を翻訳することになったのは，私にとって光栄なことと思う．私はかつて大学院生の頃，伏見康治著「現代物理学を学ぶための古典力学」（1964，岩波書店）で本書の存在を知りさっそく求めて読んだ．思えば25年もの昔のことである．かくも歳月を経た今，高橋康先生（カナダ）のお勧めで本書を訳すことになったことは感無量である．

著者 Lanczos（Einstein の教え子の一人）は，ダブリン高等科学研究所の教授として力学の原理的問題の教授法を次つぎと開発してきたことで有名である．来年は，生誕百年ということで彼を記念する国際会議がカナダで開催されるとのことである．

本書は，第一版が出版されたのは 1946 年であるが，その後版を重ねて 1970 年に第四版が出ている．最近，Dover 社から科学の名著の一つとして再版された (1986年)．このような名著が，わが国であまり注目されていないのは不思議なことである．

解析力学は，抽象的な側面が少なくない学問である．力学問題の解決には一般化座標，循環座標や正準変換論が用いられる．運動方程式を解かなくてもラグランジュの関数の不変性から保存則を求めることができるのである．ネーターの原理は，解析力学の重要な柱の一つである．このような抽象化によって，解析力学はニュートン力学の枠を超えた普遍的な理論に発展してきた．著者 Lanczos は，相対性理論も量子力学も正準理論に基礎をおく力学の変分原理の見方からすると一貫した方法論の立場で理解されると解説している．力学の変分原理は，たしかに技術的意義だけでなく科学方法論的意義を持っているのである．このことを理解するためには，具体的な力学問題を解いてみる必要があろう．具体的素材と結び付いた一般化や抽象化が行われてきた歴史的な事柄

を理解することも解析力学を理解するときの助けとなるに違いない．

本書の内容は，力学問題を解くという点からみれば初等的な問題だけが扱われており，学部学生でも容易に読み進むことができよう．また，連続体力学も扱われており工学部の学生諸君にとっても必読書となるに違いないし，さらに進んで科学方法論的な考察に進もうとする大学院生，研究者にとっての手引となるであろう．

最後に，本書の出版に当り，日刊工業新聞社出版局の三橋賢朗氏の御助力をいただいたことを深く感謝したい．

1992年7月

一柳　正和

序　　文

著者私が Purdue 大学の大学院で，多年にわたって力学の変分原理に関する2学期間の講義を担当していた際，解析力学の基本原理と方法のすばらしさに魅了されて心が異常にたかぶるという経験を何度となく重ねたものである．数理科学の他の分野で，抽象的な数学的思考と具体的な物理的内容とがこれほどまでに見事に，しかも完全に補いあっている例はほとんどなかった．力学の原理が数学と物理学との多くの傑出した研究者を大いに魅了してきたことは決して偶然ではない．また，初期のヨーロッパの多くの大学が力学理論の課程をすべての前途ある数学物理の学生達の学習計画のなかに加えたことも決して偶然ではなかったのである．解析力学は物理や工学の分野での動力学の問題を解くのに有効な手段を提供してくれるだけのものではない．航海術や工学においてジャイロスコープが実用的な機具としていかに重要であろうとも，それが力学理論の重要性の証になっているわけでもなく，力学の一般的原理の存在自体こそがその証なのである．

力学の変分原理に関する本書が高級な力学の標準的教科書に対抗して書かれたものとは思わないでいただきたい．従来の教科書で扱われている方法や形式的内容が優れているという点に対して少しの疑いも抱いていないのだが，初等的でしかも哲学的流儀で精密科学の基本的骨格を説明する教科書があってもよいではないだろうか．

今日の教科書の多くは，あたかも読者がいつも超人の前に座らされているかのような落ち着かない気持ちにさせるためとでもいうように，煙に巻くような調子で理論が展開されている．本書は謙虚な気持ちであまり欲張らない読者向けに書いたものである．著者の過去の経験に照らせば，今日の大学教育の目立った欠陥の一つは，基礎的で見かけ上は簡単に見える諸概念を初等的な教科書の部類に入れて，学生がその意味を十分に把握できない学年次に格下げする

ことにあるように思われる．この誤りに起因した弊害は日常よく見受けられるところである．分子衝突実験の細かなところにまで立ち入って考察することができる学生が，質量と重さとの違いや，重力質量と慣性質量の区別についてまったく混乱した考え方をしているのをよく見かける．力学は基本的な科学なので，こうした取り違えは目立ちやすいのである．

少しでも哲学的思考になれた人々にとっては，実際の運動の結果として起こる変位と仮想変位の違いは自明のことであって，何ら説明を加える必要はないであろう．しかし今日の学生は，哲学的思考にはいかにもなれていないようで，彼らにはその相違は不明確であって，すでによく知られた例題にそれを適用して，問題を解いてみることなしには，仮想変位の意味をつかむことはできないと思われる．それゆえ，著者は変分計算の適用法を理解させるには，学生に多くのベクトル力学のありふれた結果を仮想仕事の原理から導き出させてみるにこしたことはないのではないかと考えるようになった．これらの演習の副産物として，学生は元来は無関係な多少とも公理主義的に述べられている力やモーメントの性質が，どれもすべてを含むことのできる単一の原理からどのようにして導かれるのかということに注意を向けるようになると思う．そうなったとき，学生には新たな興味が生まれてきて，静力学の領域以外にも目を向けてくれるであろう．そこでダランベールの原理を用いさえすれば，仮想変位の原理の方法がどれほど複雑な力学的問題の運動方程式を求める場合にも，大いに役立っていることを彼らは理解するであろう．

最初からラグランジュの運動方程式から始めて，ハミルトンの理論に話を進めて行くならば，本書の記述はかなり短縮できたかもしれない．もし動力学によく現れる微分方程式の定式化と技術とともに，それらを解く上でのいくつかの処方とに学生をなじませることが本書の目的であるとするならば，そうしたやりかたもあったであろう．しかし，そうすることは著者の望むところではなかった．Euler と Lagrange の偉大な理論，Hamilton と Jacobi の偉大な理論の背後には，哲学的で非常に豊富な内容が宝のごとく隠されており，それらは数学の心得のあるすべての人々にとって，最高の知的喜びの源となるに違いない．形式論理的取扱いに完全に息が詰まってしまうような学生に，これらの理論の隠された美しさを彼ら自らの手で発見する機会を提供するということを最

優先することが著者の意図なのである．この目的のために，この本では事の始まりからときおこし，歴史的展開の全体像を示し学生を新概念になじませるような問題をいくつか配しておくことにした．それらの問題は簡単に解を見つけ出せるものばかりではあるが，関わりのある一般的原理を説明するために選んである．

内容に関することで，本書で省いた重要な項目のうちの一つは力学的方程式の摂動理論である．はじめに準備していた相対論的力学の章もスペースの関係で割愛せざるを得なかった*．それでも，本書で扱っている課題の量はこのままで週3回の大学院課程2学期分の科目とするに十分なものであり，力学を専門とするのでないが，その基本的原理について一通り理解したいと思う数学科，物理科および工学部の学生諸君にとって十分役立つものであろうと信ずる．

参考文献について特に多くのものを記載しなかった点をお断りしておかなければならない．本書の内容は，著者が長い年月をかけてまとめ上げてきたものであるので，どの文献からオリジナルな情報を得たのか分からなくなってしまったからである．主として，Whittaker の解析力学，Nordheim の Handbuch der Physik の論文，Prange の Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften の論文などから多くを学んだことは事実で，これらは参考文献としてあげておいたので一読されるとよい．

著者は，J. L. Synge 教授にお礼を申し上げたい．同教授は，原稿の段階で推敲し表現の不十分なところを指摘して下さった．見解の相違はある場合には見かけ上のことであったが，別の場合には定式化の見直しができて，大変読みやすくなった．原稿全体の校正をしていただいた G. de B. Robinson 教授と A. F. C. Stevenson 教授にも感謝する．ニューヨーク市数表事業会の Ida Rhodes さんと Toronto 大学の G. F. D. Duff 氏には，校正刷りを点検し索引を作成する作業で大変お世話になった．これらの友人同僚の皆さんの寛大な協力は，心の暖まる経験である．

［訳者註*］　相対論的力学の章と付録Ⅰは第2版（1962年）に追加された．付録Ⅱは第3版（1965年）に，また連続体の力学の章は第4版（1970年）に追加された．

力学の変分原理は，Descartes に始まりフランス革命に終わるかの偉大な啓蒙主義の時代，Leibniz, Spinoza, Goethe そして Johan Sebastian Bach の活躍した時代に牢固として根を下ろしている．この時代はヨーロッパの歴史において宇宙的視野での考察が花を開いた時代である．少しでもこの時代の息吹を読者諸兄に伝えることができれば著者のこの上ない喜びである．

Cornelius Lanczos

Los Angeles May, 1949

目　次

第2章　変分計算

第3章　仮想仕事の原理

第4章　ダランベールの原理

第7章　正準変換

第8章　ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式

序　　論

1.　力学の変分原理

力学の基礎が Newton によって三つの法則の形に定式化されて以来，力学の発展は主に二つの方向に発展してきた．一つは，Newton の運動法則から出発する方法である．本書では，この方法を「ベクトル的力学」と呼ぶことにしよう[1]．粒子の任意時刻の運動はそれに働く力によって一意的に決まるから，この方法では粒子に働く力をすべて知ろうとするのである．したがって力とモーメントの分析と綜合が基本的課題になる．

Newton 力学では，力の作用の大きさはその力によって生ずる運動量の変化によって測られるとする．しかし，Newton と同時代の哲学者 Leibniz は力の作用の動力学的尺度として別に vis viva（まだ活力を残している力）というものを考えることを提起した．Leibniz の vis viva は——本質的でない因子 2 を除いて——今日われわれが運動エネルギーと呼んでいるものに他ならない．Leibniz は Newton の「運動量」の代わりに「運動エネルギー」を，同時に Newton の「力」の代わりに「力のなす仕事」を用いた．「力のなす仕事」は後になってさらに基本的な「仕事の関数」へと発展する．この意味で，Leibniz は解析力学[2] と呼ばれる第二の分野の開拓者なのである．解析力学では，平衡状態と運動状態は二つのスカラー量，運動エネルギーと仕事の関数，を用いて研究される．仕事の関数は，「ポテンシャル・エネルギー」と呼ばれるようになる．

1)　必ずしもベクトル解析にだけ頼る方法という意味ではない．

2)　この用語については第 1 章第 1 節の末尾の注を参照．

運動はその本性として方向性を持つ自然現象であるのに，運動を決めるのに二つのスカラー量で記述することは一見不思議なことである．1個の粒子の空間での運動を記述するには最低3個の運動方程式が必要であるが，エネルギー保存則（運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和は常に一定であること）からはただ1個の方程式しか出てこない．2個以上の粒子系ではこのくいちがいは一層大きなものになる．それにもかかわらず，これら二つのスカラー量を，基礎方程式の一つとしてでなく基本原理として用いるなら，どのような複雑な体系についても運動のすべてをその中に蔵しているというのが真相なのである．

2.　オイラーとラグランジュの方法

上述のことがどのようにして導かれるかを理解するために，時刻 t_1 に点 P_1 にある1個の粒子について考えてみよう．その時刻での粒子の速度も分かっているとしよう．さらに一定の時間の後には，その粒子の位置は P_2 であろうことも分かっているとする．粒子のたどった経路の方が分からなかったとしても，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーが任意の速度と位置に対して与えられているならば，数学的操作によってその経路を完全に見出すことができる．

最小作用の原理の発見者である Euler と Lagrange は，次のように考察を進めた．今，2点 P_1 と P_2 を勝手な経路で仮に結んだとしよう．そのような経路は，十分に滑らかな曲線として選んだとしても自然が選び出した粒子の経路とは一般には一致しないであろう．しかし，試行経路に補正を重ねていけばついには実現した経路とみなされる曲線にいきつくことができるだろう．このことをもう少し詳しく見てみよう．粒子を仮想的な経路に沿ってエネルギー保存則に矛盾しないやり方で動かしてみる．このとき，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和は時刻 t_1 でのエネルギーの真の値 E と等しくとらなければならない．この制約のおかげで，経路上のどの位置における速度も決定され運動全体が決められる．経路の方は自由に選べばよいが，一たび選べばエネルギー則によって運動が一意的に定まるのである．

仮想的な経路の任意の位置を粒子が通過する時刻と P_1 と P_2 に至る全運動にわたっての vis viva（運動エネルギーの2倍）の時間積分を求めることができる．この時間積分は，「作用」と呼ばれる．この積分の値は，選び出した経路のおのおのについて一定であり，また，二つの同一の端点 P_1，P_2 を通り，あたえられたエネルギー E を持つようなどんな仮想的などの経路に対しても一つの確定した値を持つ．

この「作用」の値は，ある経路では大きな値を，他の経路では小さな値をという具合に，経路ごとに異なる．数学的には，あらゆる可能な経路について作用の値が求まったと想定することができる（少なくとも，2点 P_1 と P_2 とがあまり離れすぎていない限り）．作用の値が最小値をとる経路が一つ確定するはずである．最小作用の原理は，こうして見つけられた経路が実現する運動の経路であることを主張する．

1粒子の場合を例にとってこの原理を説明したが，任意の粒子系やもっと複雑な力学系に対しても一般化することができる．

3. ハミルトンの方法

仕事の関数が粒子の位置だけでなく時間にも依存する場合の力学の問題を考察しなければならないことがある．このような系では，エネルギーの保存則はもはや成り立たないから，オイラーとラグランジュの方法を適用することはできないが，ハミルトンの方法を用いることはできる．

ハミルトンの方法においても，始点を P_1，終点を P_2 とし，その間の経路を考える点ではオイラーとラグランジュの方法と同じである．しかし今度は，仮想的な経路をいかなる制約もつけないで考えることになる．滑らかであれば（連続性の条件を満たすことは当然として）どんな経路も考えてよいだけでなく，今度は運動の時間的変化の方もまったく任意であってよい．仮想的経路に対するただ一つの要請は，時刻 t_1 に点 P_1 を出発して時刻 t_2 には点 P_2 に達するということだけである（オイラー・ラグランジュの方法では，エネルギー保存則によって運動が制約を受けているのでこの要請を満たしていない．また，仮想的な経路を通って P_1 から P_2 に達するのに要する時間も実現する運動の場

合の値と異なる).

作用の測度として用いられる特性量――これを何と呼ぶかまだ確定していない――は，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーとの差の時間積分である．ハミルトンの最小作用の原理は，この積分の値が最小になる運動が実現する運動であることを主張する．

保存系（すなわち，エネルギー保存則の成り立つ体系）では，オイラーとラグランジュの原理は，ハミルトンの原理の一つの帰結になっているが，ハミルトンの原理は非保存系に対しても有効なのである．

4. 変分法

積分の値を最小にするという数学の問題は，微積分学の一分野である変分法によって扱われている．この数学の示すところによれば，無限にあり得る仮想的経路をいちいち考慮に入れることなしに，最終的な結論を得ることができる．数学的方法にとっては，実現すると思われる経路に限りなく近い経路に限って考えればよい．仮想的な経路のうちで任意ではあっても実現する経路から無限小しか離れていないような経路は，経路の変分と呼ばれる．変分法では，こうした無限小の変分による積分値の変化が調べられる．

5. 力学におけるベクトル的方法と変分法の比較

力学におけるベクトル的方法と変分法的取扱は，自然現象のおなじ領域での二つの異なる数学的表現法である．ニュートン力学では，「運動量」と「力」という二つの重要なベクトルを用いてすべてのことが処理できると考える．一方，Euler と Lagrange の発案による変分法の方法では，二つのスカラー量，「運動エネルギー」と「仕事の関数」，が用いられる．数学的側面を別にしても，これら二つの方法が同等であるかは一つの問題である．いかなる拘束もうけていない「自由」粒子の場合には，二つの方法は同じ結論をあたえる．しかし，なんらかの拘束条件のある場合には，解析的方法の方がはるかに便利である．どんな拘束条件も，系の運動はそれらの条件を満たすすべての仮想的経路

に沿っていると要請するだけで，容易に考慮することができる．ベクトル的方法では，拘束条件を破らないようにするためにはなんらかの力を想定しなければならないが，そのような力についてあらかじめなんらかの仮定を持ち込まざるを得ない．その結果，ニュートンの第3法則（作用反作用の法則）がどんな場合にも成り立っているとはいえなくなる．この法則は，剛体の運動の場合だけ成り立つにすぎないのである．

一方，ニュートンの方法では力については何の制約もつけていないが，変分法の方法では力を一つのスカラー量（仕事の関数）から導かれるものに限定している．仕事の関数として表されない摩擦力のような力は，変分法では扱いえないが，ニュートンの方法ではそのような力もたやすく扱うことができる．このような力は，運動の巨視的記述には含まれていない分子の微視的運動に起因している．巨視的変数の他に微視的変数まで加えて記述を完全なものにすれば，仕事の関数から導くことのできないような力は滅多に現れない．

6. 変分原理の数学的意義

物理と工学の基礎的問題はベクトル的力学で解くこともできるから，変分法にたよらなくともよい．しかし，少し複雑な問題になると変分法の優位さがはっきりしてくる．この優位さは，問題を定式化するにときに座標系を自由に選べることに由来している．ベクトル的力学の方が便利な場合は，直交座標系で解くことのできる場合だけである．なぜならば，曲線座標系でベクトルを成分に分解しようとすると，テンソル解析の知識なしにはすまされない．自然現象のもつ不変性とか共変性といった基本的概念の重要性が認識されるようになったのは最近のことであり，Euler や Lagrange の時代には知られていなかったのであるが，力学の変分原理はすでに不変性を自動的に満たすようにでき上がっており，その発展が待望されていたといえる．用いる手法も得られる方程式もともにどの座標系に対しても有効なので，座標系を全く自由に選んでよいのである．変分法の数学的・哲学的意義は，座標系の選び方における完全な自由さと座標変換にある．このことのおかげで，運動を表現する方程式もその解法も非常に簡単になるのである．もし「循環座標」と呼ばれる変数を見出すことができたならば，基礎となる運動方程式の解の一部はたちどころに得ら

れる．もし用いている座標系がすべて循環変数であれば，力学の問題はそのことで完全に解けたことになる．この意味から運動方程式の解を求める問題の核心は，座標変換の問題である．微分方程式を直接解くという具合にでなく，循環変数をできるだけ多く捜せばよい．オイラーとラグランジュ方法では，循環座標を系統的に見出す方法はないので，循環座標を得るかどうかはどこまでも偶然的なことでしかない．しかし，Hamilton と Jacobi によって開発された新しい理論は，広範な変換性を備えた「正準方程式」で運動が表現されるので，従来の理論よりもはるかに広い範囲の適用領域をもつに至っている．この方法では，一つの偏微分方程式を解けばすべての循環変数の組を取り出すことができる．

この偏微分方程式が実際に解ける場合は確かに特定の条件下にある問題に限定されているが，理論物理学の扱う問題の多くのものはこの種のものである．したがって，解析力学の最も発展した理論形式は，美学的ないしは哲学的な意味あいで優れているだけでなく，従来の方法では解くことのできなかった問題を解くという点でも非常に有用性に富んでいるのである[3]．

7. 力学における変分法の哲学的意義

今日では，自然科学の論文では哲学的考察はなるべく避けるべきであるということが暗黙のうちに認められているが，力学における変分原理を考察する際にはこのルールを無視してもよいであろう．その理由は，これらの原理が哲学的論議を非常に重んじる時代に展開されはじめたこと，さらには変分原理が哲学論争の中心課題になっていても誤解に基づくことが少なくないことにある．たしかに，「勝手な」経路を思い描くことで実在性の枠を拡大し，ある物理量を最小にするという原理でもって多くの可能性から一つに絞っていく方法は，自然現象の因果的記述のうちに何か目的といったものを持ち込んだように思えよう．このことは，従来の現象の因果的記述に反している．しかし，17，8 世紀の世界の統一的見方からすれば，目的論と因果律の間には何の矛盾も存在しな

3) 変換理論を利用しない解法については，この本では述べない．これらの理論については，巻末の文献を参照されたい．

いと見ているとしてもなんら不思議はない．この時代の根本的（世界）原理は，「理性」と「世界」の予定調和説だったのである．高等数学の数々の発見とその自然科学への応用の成果は，当時の哲学者をして世界は本質的に知性的内容をもつということに無限の信頼を抱かせた．知的神こそは Spinoza 以上に Leipniz 哲学の根本的命題となっていた．それと同時に Leipniz は熱烈な目的論者でもあったので，変分法の発展にその哲学が色濃く反映している点も少なくない[4]．

しかし，極大極小問題についての純粋に認識論的また論理学的興味が無限小解析の発展にあれほどまでの推進力となり，また，「最小時間の原理」に基礎をおく Fermat の幾何光学の発展が当時の哲学的自然科学者にどれほどの感動をあたえていたかなどを考え合わせれば，上に述べてきたことも驚くにたりない．Maupertuis 等に見られた方法論的目的のためだけの生半可な態度のせいで，正しい傾向さえもが評判の悪いものになってしまったとしてもそのことは当時の哲学者達のせいではない．穏当で実践的でそのうえ事実に即して進んだ19世紀――この傾向は今日まで受け継がれている――には，思弁的なものや解釈論的なものは「メタフィジカ」（形而上学）として退けられ，自然現象の記述といった点に限定されてしまった．この哲学の見方からすると，数学は単に簡便な手段にすぎず現象の間に存在するであろう関係を表現する経済的な言語にすぎないとされる．したがって，E. Mach が「力学」（the Science of Mechanics, 1893 ; p. 480）において解析力学について次のような評価を加えたことは，19世紀の「実証主義哲学」の時代精神と全く一致したものであり驚くことではない．Mach はいう；『力学のこの分野からはいかなる本質的に新しいことは期待できない．力学の問題を実用的に処理することだけが目的なので，解析力学の構成について云々する前にわれわれはまずなによりも原理に関する事柄についてはっきりしておかなければならない．こうした事情を理解しないものは Lagrange の業績の含意が理解できないであろう．そこでもやはり，<u>思考の経済</u>ということが特徴であった（下線は原著による)』．この哲学では，力学の変分原理もニュートンの3法則の別の表現にすぎないと早合点しそ

4) A. Kneser の歴史的著述を参照のこと：Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leipniz bis zum Gegenwart (Leipniz, Tenbner 1928)

こにいかなる本質的重要さをも認めようとしない．

しかし，哲学的流行にははやりすたりがあって，決して終焉を迎えない．われわれの時代には，アインシュタインの一般相対論という比類なき根本的な発見に遭遇することができた．それは高度の数学的でまた哲学的でもある思索によって達せられたのである．これは実証主義者がメタフィジカと呼んできた方法を駆使して達成されたものであるが，単に実験を積み重ねることによってだけで決して明らかにすることのできなかったことの本質をこの理論は解明した．一般相対論は，ギリシャ時代と18世紀の偉大な宇宙論者達の時代精神を再び前面に押し出した．

相対論の成功のお蔭で，力学の変分原理は形式的なものである以上のものを含んでいるという評価を受けるに至った．ニュートンの3法則の単なる書き換えであるだけでなく次の点で変分法には利点がある．

1. 相対論は，自然の法則は座標系のとり方によらない，すなわち不変な形式で表されなければならないことを要求する．変分法では，スカラー量の最小値はそれを測る座標系のとり方に無関係なのでこの要請を満たしている．ニュートンの運動方程式は，相対性の原理を満たさないが，基本的関数である作用が不変性の原理を満たすと要請するなら，最小作用の原理は有効性を保持できた．
2. 一般相対論は，物質と場とは分離できないこと，物質は場の生成物であることを示した．したがって，物理学の基本方程式は常微分方程式ではなく偏微分方程式で表されなければならない．ニュートンの粒子像を場の概念に結び付けることは困難であるが，変分法の方は多粒子系の力学に限らず連続体の力学まで拡張できる．
3. 変分原理の基本量「作用」を座標変換に関して不変であるように選べば，一般相対論の原理は自動的に満たされる．リーマンの微分幾何学によれば，われわれはそうした不変量が何であるかが分かり，不変性の要請を満たす場の方程式を見出すことは困難でない．このこと以外では，共変的で首尾一貫した方程式系を求めるに当たってわれわれの数学の知識はほとんど重要でない．したがって，相対論に照らして考えてみると，自然の法則に変分法の手法を採用することは単に付随的でない意義をもっている．

第 *1* 章 解析力学の基礎的知識

§ 1. 解析力学の主要な考え方

Euler と Lagrange によって導入された力学の解析的形式は，方法においても考え方においてもベクトル的力学と多くの相違点をもっている．Newton が定式化した力学の基本的法則――「質量と加速度の積は動かす力に等しい」――は，1粒子に対してだけ成立している．この法則は，地球の重力場での1粒子の運動の研究によって得られ，次に太陽の引力を受けている惑星の運動を決めるときに用いられた．この場合，運動している物体は「質点」ないし「粒子」，すなわち質量が一点に集中した対象に理想化されている．したがって，力学の問題は次のように定式化される．「粒子は空間を自由に動けるとし，力が作用しているとする．このとき，任意の時刻の運動を決定せよ」．ニュートン法則によれば，運動の微分方程式が得られ，運動を決定する問題はこの方程式を解くことに帰着される．

もし粒子が固体や液体におけるように他の粒子と相互作用していても，一定の条件さえ満たすならニュートンの方程式を用いることができる．この場合には，まず着目する粒子を他の粒子から区別し周りの粒子からうける力を決定しなければならない．各粒子は，自由粒子の運動法則に従う独立な単位である．

こうした解析法は，ときには極めて面倒なものになることもある．相互作用の性質が未知であればそのことで何か仮説を持ち込まざるを得ない．Newton は第3法則――「作用反作用の法則」――はどんな力学の問題でも考慮に入れるべきであると考えていた．しかし，そのようにはことは運ばない．剛体の運動の場合でさえ内部の力は中心力であるという仮説をもうけなければならな

い．もっと複雑な系になれば，ニュートンの方法では一意的な解が得られなくなることもある．

解析力学の方法は，これとは全く異なる．粒子はここではもはや孤立した対象ではなく，「系」の一部分を意味する．「力学系」は，相互作用している粒子系のことである．1個の粒子が重要なのではなく，重要なのは全体で系を構成していることである．たとえば，惑星の運動の問題ならば一つの惑星の運動が調べたいのであるが，1惑星だけに注目しても解答は得られない．惑星に働いている力は太陽による部分が主であるが少しではあっても他の惑星からの力を受けているので，他のすべての惑星の運動についての知識なしには正しい答は得られない．このように，力学の問題を考えるときは，系を部分にわけないで全体として扱う方が利点がある．より重要なことは，力の解析を統一的に扱うことができる点にある．ベクトルを使う方法では，空間の各点に注意を払う必要があり，作用している力は各粒子とは無関係に決めておかなければならない．解析的方法では，粒子群の位置の関数だけが分かっていればよい．この「仕事の関数」は，粒子に働く力のすべてを含み得る．力はこの関数を微分することで得られる．

二つの方法のもう一つの重要な違いは，「補助条件」に関係する．動いている系の各粒子には，先験的にあたえられる拘束条件が存在することがある．個体の場合ならば，系は全体として剛体のごとく運動するが，このことは粒子間の距離は変化し得ないことを意味する．しかし，拘束条件については先験的根拠はない．この場合の条件は，非常に強い力によって実現できる性質のものであろう．これに反して，解析的方法ではそのような力についての知識を必要とせず，あたえられた拘束条件を当然のものと見なしてよい点に利点がある．われわれは，系の剛性が何に由来するかについての知識なしに力学的方程式を見つけられる．また，流体の場合でも粒子間の力についての詳細な知識を必要としない．流体は，体積変化に対しては非常に強い力で抗するが体積を保った形状変化はごく弱い力で起こるという経験的事実だけで十分である．われわれは，流体内での未知の力というものを無視することができ，運動においても流体のどの部分も体積を変えないという拘束条件でそれらの力を置き換えることができる．このように先験的な拘束条件の方が，それを実現している力に関する知

識に比べていかに簡単なものであるかを考えれば，ベクトル的力学より解析力学の方がどれほど優れているかは明確であろう．

それ以上に基本的である利点は，解析的方法が有効性を最もよく示している統一的原理である．複雑な力学系の運動方程式は，非常に多くの——無限大になることもある——微分方程式の形式をとる．力学の変分原理は，それらの微分方程式全部を導く統一的方法を提供する．微分方程式全体の背後に，物理的意味をあたえる一つの原理が存在する．基本的物理量としての「作用」があたえられれば，これが停留値をとるという原理で微分方程式全部を導出できる．それだけでなく，この原理の表現は座標系の採り方に関係しない．このことのお蔭で，運動方程式は任意の座標変換に対して不変なのである．

《用語についての注》

解析力学にいう「解析的」とは，（精神）分析の哲学的方法とは何の関係もない．単に，数学での「解析」のことであり，解析学の原理を利用することを意味する．フランスやドイツでは解析力学という用語は，オイラー・ラグランジュの方法やハミルトンの方法を用いて力学の問題を数学的に解くことに当てられている．英米では，簡単なベクトル的力学の問題を解く場合にもこの用語が用いられることもある．力学というとき，静力学と動力学の意味が含まれている．静力学では粒子や粒子系の釣合の状態が扱われ，動力学ではそれらの運動が扱われる．（力学の他の例は連続体の力学である．これには，流体力学と弾性体の力学が含まれ，常微分方程式でなく編微分方程式が用いられる）．

《ま　と　め》

次の点で，ベクトル的力学と解析力学とは見方が異なる．

1. ベクトル的力学では，粒子を個別に捉え，おのおのをべつべつに考察する．解析力学では，系を全体として捉えて考察する．
2. ベクトル的力学では，個々の粒子に作用している力を求める．解析力学では，仕事の関数（ポテンシャル・エネルギー）を考える．この関数が力に関するすべての情報を含んでいる．
3. 系の座標の間の関係（経験的にあたえることができる）を保つ強い力が存在する場合は，ベクトル的力学ではこれらの力を考慮に入れなけ

れぱならない．解析力学では，それらの関係はあたえられたものと見るだけで陽に力を考えなくてよい．

4．解析力学では，運動方程式の全部をそれらを陰に含んでいる統一的な原理から導くことができる．その原理とは，「作用」を最小にすると表現される．最小値原理は座標系の採り方に関係しないので，解析力学の方程式はどんな座標系の組に対しても導くことができる．この性質のお蔭で個々の問題に即して座標系が選べるのである．

§2．一般化座標

ベクトル的力学は，座標についての抽象的な概念を持ち合わせていない．本来的に，これは幾何学的方法であった．ベクトルを用いる方法は，静力学の問題を解く際には非常に便利であった．しかし，運動が問題になってくると，ベクトル的方法で解ける問題は限られてしまう．複雑な問題では，ベクトルを用いる幾何学的方法は不便なものとなってしまい，抽象的で解析的な方法に道を譲ることになった．力学の解析的方法を確立するには，座標概念の一般化が是非とも必要なのである．

解析力学は数学の一分野である．すべての議論は，抽象的レベルで進められる．物理的世界が数学的関係に翻訳される．この翻訳は，座標概念の助けを借りて行われる．座標は，物理的空間の点を数値に1対1対応させる．この対応関係が定まれば，座標を代数的に扱えるようになり，もはや物理的意味は忘れ去ってもよい．計算が実行されて結論が出た段階で物理的世界に引き戻せばよい．

Fermat, Descartes の時代と Euler, Lagrange の時代の間に，高等数学の手法が飛躍的に発展した．最も重要なものの一つは，Descartes の座標概念の一般化であろう．座標の目的が，空間の点と数値とを1対1に対応させることであったとすると，直交軸の導入やそれらを用いて長さ，高さ，幅などを決めることは，対応関係の一つにすぎない．他の対応関係も同等に認められるのである．たとえば，極座標系 $\{r, \theta, \phi\}$ を直交座標系 $\{x, y, z\}$ の代わりに用いて

もよい．解析的方法の特徴は，物理的状況を数学に翻訳するとき座標系の特性に関して特別の仮定を持ち込まなくてよいことである．

N 個の自由粒子の系を考えてみよう．ここで「自由な」とは，運動学的などのような条件も課されていないということである．直交座標系での粒子の座標

$$x_i, \ y_i, \ z_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{12.1}$$

が系の位置を特徴づけており，x_i，y_i，z_i を時間 t の関数としてあたえることができれば運動の問題は解けたことになる．

同じ問題を，座標x_i，y_i，z_i を

$$q_1, \ q_2, \ \cdots, \ q_{3N} \tag{12.2}$$

で表し，q_k を時間の関数で表すという具合に解くこともできる．

間接的な方法で解くこのやり方は解析的な利点をもっており，このことは動力学の問題を解くにあたって決定的である．数学的には，これは座標変換と呼ばれ，直交座標系から極座標系への変換の一般化である．

関係式

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta \ \cos\phi, \\ y &= r\sin\theta \ \sin\phi, \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned} \tag{12.3}$$

が，古い変数は新しい変数で表されるように一般化される．変数の数は 3 個ではなく 3N 個となる．なぜなら，力学系の状態を記述するのに，3N 個の変数が必要だからである．したがって，座標変換の一般形式は次のように表される：

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \cdots, q_{3N}), \\ &\text{-----------------} \\ z_N &= f_{3N}(q_1, \cdots, q_{3N}). \end{aligned} \tag{12.4}$$

関数 $f_1, \cdots, f_{3N}$，は好きなように選んでよく，x_i，y_i，z_i を時間 t の関数として求める問題は，$q_1, \cdots, q_{3N}$ を t の関数として求める問題に移される．新しい座標をうまく選ぶことができれば，新しい問題の方が元の問題よりもぐんとやさしくなる．座標系の選び方にこのような自由度があるお蔭で，あたえられた問題に最も適した座標系を選ぶことができるのである．たとえば，天体の運動の場合，すなわち一つの天体が固定した引力中心（太陽）の周りを運動している問題では，直交座標系よりも，極座標系の方が適している．

拘束条件下にある系を考察する際には，一般化座標の威力が一層よく発揮される．このときの条件は，座標の間の関数的関係によって表される．たとえば，2原子分子の場合ならば，原子間距離は強い力によって一定に保たれている．力学的には，この系は座標が x_1，y_1，z_1 と x_2，y_2，z_2 である2質点の系である．原子間距離が a であるという条件は

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = a^2 \tag{12.5}$$

で表される．この条件によって，6個の変数は5個にできる．なぜならば，6番目の座標は条件 (12.5) によって残りの変数の関数になるからである．しかし，条件式 (12.5) は直交座標に関して対称であるので，どれか一つを従属変数に選ぶことはあまり好都合なことではない．系の重心の変数として3個の変数を導入し分子の軸方向を指定する2個の角変数を用いる方がよい．6個の直交座標は，5個のこれらの変数で表される．もう一つの例として，任意の粒子数からなる剛体を考えてみよう．この場合でも，系の重心座標と重心に関して相対的な剛体の位置を指定する3個の角変数だけで十分である．これら6個の変数で剛体の運動は記述できる．構成粒子の位置は，これらの変数の関数としてあたえられる．

一般に系が N 個の粒子で構成されていて，m 個の拘束条件が課されている場合には，系の配位状態は，

$$n = 3N-m \tag{12.6}$$

個の独立変数

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n \tag{12.7}$$

を用いて，粒子の座標が

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1,\ \cdots,\ q_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_N &= f_{3N}(q_1,\ \cdots,\ q_n), \end{aligned} \tag{12.8}$$

であたえられるとすれば一意的に表現できる．n は時間的に変化しない定数である．n 個以下の変数では系の状態を決定することはできない．n 個以上ある必要もなく，もしそのような場合には新たな条件が追加されることになるであろう．系の配位状態を一意的に特徴づけるのに必要な変数が n 個であるとき，「系は，自由度 n をもつ」と表現される．n 個の変数 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ は，一般

化座標と呼ばれる．系を構成している粒子の数 N は粒子座標と同様の理由で解析的取扱においては重要でない．重要なのは，一般化座標 $q_1, \cdots, q_n$ とそれらを変数とする関数なのである．剛体の場合，無限大に匹敵する質点が集まっているけれども，6個の独立な変数をもつ力学系として扱われる．

簡単な系の例

1自由度の系：上下運動するピストン．固定軸の周りを回転する剛体．

2自由度の系：表面上を運動する1個の粒子．

3自由度の系：3次元空間にある1個の粒子．
固定点の周りで回転している剛体（コマ）．

4自由度の系：同一平面内で回転している2連星．

5自由度の系：間隔が固定された2粒子系．

6自由度の系：太陽の周りで運動している2惑星．
固定軸をもたない剛体．

一般化座標 $q_1, \cdots, q_n$ は，幾何学的内容をもつ場合もあればそうでない場合もある．しかし，(12.8) 式の関数はどれも有界で1価連続かつ微分可能でなければならない．そのうえ，n 個の関数の結合のヤコビ行列式の少なくとも一つの結合はゼロでないことが必要である．特異点では，これらの条件が満たされないかもしれないので，はじめからそれらの点は除外しておかなければならない．たとえば，直交座標系から極座標系に変換する際には，(12.3) は一般的な正則性は満たされているが，$r = 0, \theta = 0$ の点では，ヤコビ行列式はゼロになることに注意しよう．これに加えて，別の意味での条件が課せられる．あたえられた拘束条件が要求する以上に制約が加わらないようにしておかなければならないので，一般化座標 $q_1, \cdots, q_n$ の連続的領域は元の直交座標の許される領域が十分に広くなるように選んでおくにこしたことはない．例として，(12.3) であたえられる座標変換を考えてみると，r は0から∞，θ は0から π，ϕ は0から 2π の間の値が採れるとしておけば，x, y, z の領域は無限大に広がっている．しかし，この種の条件はそれほど気にしなくてよい．なぜなら，運動のすべての可能性は尽くせないかも知れないが，運動の特色はほとんど記述できるからである．

一般化座標を用いて拘束条件を全部消去することが，いつも得策であるとは

限らない．拘束条件の一部分だけ消去し，残りの条件は新たな制約としておくこともできる．したがって，拘束条件をもつ系の問題は，次のように定式化される．方程式の組 (12.8) があたえられ，それに加えて m 個の条件式

$$\phi_i(q_1, q_2, \cdots, q_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{12.9}$$

があたえられる．自由度は$n'(= n-m)$ である．

《ま と め》

運動の解析的取扱は，Descartes の導入した座標概念を一般化することで可能になる．力学系の状態を特徴づけるパラメータのどんな組も新しく座標として採用することができる．それらは，力学系の一般化座標と呼ばれる．

§ 3. 配位空間

力学系の抽象的で解析的な取扱において，最も想像力に富んだ概念が，配位空間による描像である．3次元空間の点に3個の変数 x, y, z を対応させたように，今後は n 個の変数 $q_1, \cdots, q_n$ でもって n 次元空間の点Pの座標と見なすことができる．同様に，方程式

$$\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \\ z &= h(t), \end{aligned} \tag{13.1}$$

で一つの曲線を表し運動はそれに沿うと見ることができたように，方程式の組

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= q_n(t), \end{aligned} \tag{13.2}$$

を用いれば同じような描像が得られる．これらの方程式が，力学の問題の解である．この幾何学的描像では，n 次元空間のあたえられた曲線に沿って動く点Pというものを思い描くことができる．

こうした幾何学的描像は，たいへん有用である．力学系を構成している粒子がどれほど膨大であろうとも，またそれらがどんなに複雑に相互作用していよ

うとも，力学系全体は「配位空間」と呼ばれる多次元空間の1点として描きだされる．たとえば，無限大に近い個数の粒子から成る剛体の運動は，6次元空間の1点で象徴される．もちろんこの6次元空間は，剛体の実在性とは何の関わりもない．それは単に数学的に1対1対応しているというだけである．剛体のさまざまな状態は，6次元空間の点群に写像され，6次元空間の点は剛体の可能な状態に対応すると解釈する．簡単のため，配位空間での力学系の状態を「C点」と呼び，運動につれてこの点が描き出す曲線を「C曲線」と呼ぶことにする．ここに示した配位空間の描像は，もう少し細かく見ておく必要がある．今までの議論は，n 次元ユークリッド空間の解析幾何学に基礎をおくものであった．そのため，力学系の n 個の一般化座標はこの空間での直交座標として導入された．この章の§5で扱う解析幾何を微分幾何に置き換えて考えれば，配位空間の幾何学的構造としてはもっと適したものが見つかる．もちろん，これまでに示した初等的な描像でも十分な場合も少なくない．このことを幾つかの例で見ておこう．

3次元空間の自由粒子の位置は，極座標 (r, θ, ϕ) を用いて表すこともできる．これらを1点の直交座標と考えると，現実の空間と比べてひどく歪んだ空間が考えられる．直線は曲線に変わり，角度と距離も変わっている．この場合でも空間の重要な性質は不変である．1点は1点に，点の近傍は点の近傍に，曲線は曲線に，近接した曲線は近接した曲線に移される．連続で微分可能な曲線は，連続で微分可能な曲線に写される．変分法の計算にとって空間のこうした位相的性質は重要であるが，距離，角度，広がりといった計量的性質はあまり重要でない．こうした理由から，対応する幾何学的性質は失っていても単純化した配位空間も抽象的な解析を行う際に役立つことがある．

《ま　と　め》

n 次元空間の幾何学的用語を用いれば，1質点系の力学が任意の力学系に拡張される．運動の問題では，力学系は1点に対応付けられる．この点の運動していく空間は，もはや元の物理的空間ではない．これは，問題の性質に応じて決まる多次元空間である．

§ 4.　空間の自己写像

n 個の一般化座標

$$q_1,\ q_2, \cdots,\ q_n \tag{14.1}$$

の要件は，力学系を特徴付けるのに必要な数を越えないことであったが，

$$\bar{q}_1,\ \bar{q}_2,\ \cdots,\ \bar{q}_n \tag{14.2}$$

を一般化座標として採用することもできる．このとき，二つの座標系の間には次の式で表される関係がある：

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= f_1(q_1,\ \cdots,\ q_n), \\ &\cdots\cdots \\ \bar{q}_n &= f_n(q_1,\ \cdots,\ q_n). \end{aligned} \tag{14.3}$$

ここで関数 $f_1, \cdots, f_n$ は正則性の条件を満たすとする．すなわち，これらの関数は，q_k の関数として1価連続で微分可能でありヤコビ行列式の値はゼロでないとする．

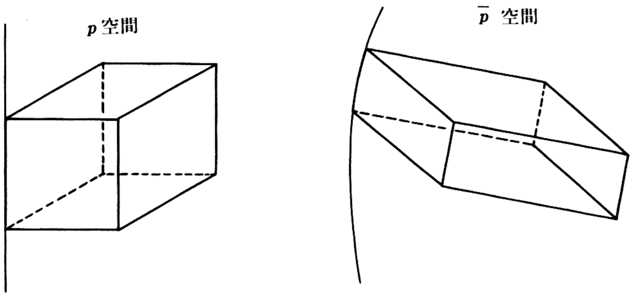
(14.3) 式の微分は

$$\begin{aligned} d\bar{q}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1}dq_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n}dq_n \\ &\cdots\cdots \\ d\bar{q}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial q_1}dq_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial f_n}{\partial q_n}dq_n \end{aligned} \tag{14.4}$$

と書かれる．この方程式は，二つの一般化座標系の間にどのような関係があろうとも，微分形は1次従属であることを意味する．

この座標変換には，つぎのような幾何学的描像が対応する．q_i は n 次元空間の直交座標とすると，$\bar{q}_i$ の方も直交座標系にとれる．そこで，q 空間と $\bar{q}$ 空間での点を考えてみる．

q 空間の点 P には，$\bar{q}$ 空間の点 $\overline{\mathrm{P}}$ が対応する．このとき，変換 (14.3) は，「点変換」と呼ばれる．q 空間の点と $\bar{q}$ 空間の点は1対1対応している．こうして，n 次元空間の自分自身への「写像」が得られる．この写像は，1対1対応の条件だけでなく，連続の条件も満足している．すなわち，点Pの近傍の点は点 $\overline{\mathrm{P}}$ の近傍の点に写像され，逆に，点 $\overline{\mathrm{P}}$ の近傍の点は点 P の近傍の点に写像される．しかし，q 空間の直線の写像は $\bar{q}$ 空間の直線でなくなる．しかし，



第1図

この対応関係も領域が狭くなればなるにつれて正常な関係をもつようになる．点Pの微小領域の直線は，直線に写像されるが，長さや角度は保存されない．平行線は，平行線に写像される．点Pの近傍の微小の平行四辺形は，点$\overline{\mathrm{P}}$の近傍の微小の平行四辺形に写像される．関数行列式Δは方程式系（*14.4*）の行列式である．幾何学的には，ヤコビ行列式Δは写像後の平行四辺形の体積と元の平行四辺形の体積の比である．行列式Δの値がゼロでないということが，点Pの近傍全体が点$\overline{\mathrm{P}}$の近傍に写像されるための条件である．このことは，二つの空間の点が1対1対応していることの必然的結果である．もし，行列式Δの値がゼロであれば，点Pの近傍のn次元領域が点$\overline{\mathrm{P}}$のより次元の低い領域に写像されることになり，点$\overline{\mathrm{P}}$の周りの幾らかの点はq空間に像をもたず他の点は無限に多くの像を持つことになる．

このような自分自身への写像の例は，流体の運動の場合にみられる．流体粒子に印を付けておき，ある瞬間にスナップショットを撮り少し間隔をおいて再度スナップショットを撮れば，流体粒子の対応する位置は自分自身への写像を表す．流体中の微小の平行四辺形に着目すれば，流体の運動につれてその形は変化し長さや角度も変化するが，その中に含まれている粒子数は変化しない．非圧縮性流体の場合ならば，平行四辺形の体積は，時間的に保存される．このような流体の運動を解析的に見ると，それは関数行列式Δが至るところで1に等しい座標変換になる．

《ま　と　め》 座標の選び方の任意性のお蔭で，一般化座標の組は他の一般化座標の組に変換される．この座標変換は，幾何学的には自分自身への写像である．この写像では，角度とか距離は不変量でなく直線は曲線に移される．しかし，任意の点の近傍の微小領域では，どんな写像も線型性を保つ．すなわちそこでは，直線は直線に，平行線は平行線に移され，体積の比は保存される．

§5.　運動エネルギーとリーマン幾何学[1)]

一般化された座標系を用いる点が，解析力学の大きな特徴である．解析力学の方程式は座標の採り方に無関係な形式で述べることができる．一般化された運動方程式のこの特徴は，力学を19世紀に発達した数学，不変性と共変性の理論，に結び付いた．Einstein が相対論において，共変性の問題が自然法則にいかに強く結び付いているかを示したことで，後者の理論は今日花を開くことができた．相対性理論の基本的立場はまさに，座標系の採り方に無関係な形式に自然法則を定式化することであった．この問題に対する数学的解答によれば，物質の存在形式はリーマン幾何学と密接に関係している．Einstein の一般相対論によれば，自然の真の姿を示す幾何学は単純なユークリッド幾何学的ではなくてより一般的なリーマン幾何学的である．この幾何学は，時間と空間を一まとめにした4次元多様体の幾何学である．

この点では，幾何学は解析的に扱うことができることを主張した．Descartes の業績は画期的なものであった．しかし，Descartes の幾何学では空間はユークリッド的とされた．直交座標系であるためには，われわれは合同と平行の条件を当然のこととして仮定しなければならない．

第2の画期的理論が，Riemann の幾何学であり，これは曲面に固有の幾何学に関する Gauss の研究を引き継いだ理論である．リーマン幾何学は，「線素」

1)　運動学と空間の幾何学関係の重要さを最初に指摘したのは Jacobi (1845) (Jacobi の原理，5章7節参照) であった．最近の研究は，Lipka, Berwald と Frank, Eisenhart らによる．テンソル解析を用いた綜合的研究については，J. L. Synge の「力学の幾何学」を参照せよ．

と呼ばれる1個の微分量$\overline{ds}$を用いて展開される[2].

この量のもつ意味は，空間の近接する2点間の距離を座標とそれらの微分量で表すことである．例として，点 P(x, y, z) と点P'$(x+dx, y+dy, z+dz)$ の間の距離を考えてみよう．ピタゴラスの定理によって

$$\overline{ds}^2 = dx^2+dy^2+dz^2 \tag{15.1}$$

である．この結果は，Euclid の仮定と座標 x, y, z の定義からの直接の結果である．

いま仮に，いかなる仮説も設けないとして，ただ単に (15.1) を線素の定義として認めたとしよう．変数 x, y, z の区間は$-\infty$から$+\infty$までであることが分かっていれば，x, y, z を直交座標と解釈することを含め，ユークリッド幾何学のすべての定理を導くことはできる．同様にして，線素の2乗が

$$\overline{ds}^2 = dx^2+x^2dy^2+x^2\sin^2 y dz^2 \tag{15.2}$$

であたえられたときも，幾何学はユークリッド的である．ただし，変数 x の区間は（0，∞）であり，y の区間は（0，π），z の区間は（0，2π）である[3]．すなわち，変数 x, y, z は，r, θ, ϕ と記した極座標である．こうしたことのすべては，境界条件とともに微分表現 (15.2) に含まれている．

一般に，空間座標を x, y, z の代わりに x_1, x_2, x_3 とすると，線素の一般形は次のようにあたえられる；

$$\begin{aligned}\overline{ds}^2 = &(g_{11}dx_1+g_{12}dx_2+g_{13}dx_3)dx_1\\&+(g_{21}dx_1+g_{22}dx_2+g_{23}dx_3)dx_2\\&+(g_{31}dx_1+g_{32}dx_2+g_{33}dx_3)dx_3\end{aligned} \tag{15.3}$$

この座標は，座標軸がデカルト座標系の場合と異なり直線で書けないので，曲線座標系と呼ばれる．この形式の表式は，変数 x_1, x_2, x_3 に関する「2次微分形式」と呼ばれる．「係数」$g_{11}, \cdots, g_{33}$ は定数ではなく x_1, x_2, x_3 の関数である．(15.3) 式は，

2) ここでの記号は，完全微分ではない（ある量の微分として表されないこと）無限小量を意味するものとする．したがって，dq_k とか dt は「q_k の d（微分)」や「t の d」を意味したが，$\overline{ds}$ は無限小の量であって「s のd」という意味ではない．実際に，$\overline{ds}$ が完全微分であったならば，2点間の最短距離は定義できなくなる．なぜならば，もし，ds が完全微分であったとすると2点間のどの曲線の長さも（始点と終点だけに依存しているので）同じになってしまうからである．

3) 2点 $(x, y, 0)$ と $(x, y, 2\pi)$ は x, y のすべての値で一致するという境界条件が加わる．

$$\overline{ds}^2 = \Sigma g_{ij} dx_i dx_j \tag{15.4}$$

とも書かれる．$g_{ij}dx_idx_j$ と $g_{ji}dx_idx_j$ は一つにまとめて書いてもよいので，独立な項の数は 9 ではなく 6 である．独立な項数を減らすためには，係数に対して条件

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{15.5}$$

を課せばよい．

リーマン幾何学の共変性と不変性の概念を系統的に使った抽象的理論では，g_{ij} は「テンソル」の成分となる．2 点間の距離はどの座標系を用いようと変わらないので，$\overline{ds}^2$ は絶対的な意味をもつ．これは，座標系によらない「絶対的」ないしは「不変な」量である．テンソルは，不変な微分形式の成分を用いて定義される．たとえば，不変な 1 次微分形式

$$\overline{d\omega} = F_1dx_1 + F_2dx_2 + \cdots + F_ndx_n \tag{15.6}$$

は，ベクトルを定義する．$F_1, \cdots, F_n$ はその成分であるが，座標系の選び方に依存するので，「共変な」量である．微分形式全体は，それにもかかわらず不変量である．この方法が，通常のように「矢印」を使わないで，抽象的かつ解析的にベクトルを定義する方法である．2 次微分形式は，2 階テンソルを定義する．高階テンソルも同様にして定義される．

幾何学の基本となるテンソル g_{ij} は，「計量テンソル」と呼ばれる．この量を用いれば，3 次元空間だけでなく任意の次元での幾何学が展開できる．n 次元空間の幾何学は，線素

$$\overline{ds}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j \tag{15.7}$$

によって決まる．計量テンソルは対称であると仮定する．すなわち，

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{15.8}$$

が成り立つとすることになる．Einstein と Minkowski は，われわれの宇宙の幾何学は，時間と空間とを含む 4 次元空間であることを示した．4 個の変数は，x, y, z, t とする．

計量テンソル g_{ij} は一般には定数でなく，変数 $x_1, \cdots, x_n$ の関数になる．g_{ij} が定数になるのは，直交座標系か直線座標系（直交軸でなく斜交軸をもつ）に限られる．曲線座標系では，g_{ij} の値は点ごとに異なる．g_{ij} は 2 個の添字をも

つがベクトルの成分と同じ性質をもち，1次元的ではなくて2次元的に配置された量の多様体をなす．

座標系の採り方に無関係に幾何学を解析的に研究することができる点は，リーマン幾何学の利点の一つにすぎない．大切なことは，(15.7) 式で線素を定義すればユークリッド幾何学のほかに一般的な幾何学が考えられることである．これが，Riemann の功績の一つである．ユークリッド型の幾何学であるためには，計量テンソル g_{ij} は特別の関数族でなければならない．もし，g_{ij} がそれ以外の関数であれば，次の二つの性質をもつ新しいタイプの幾何学が考えられる：

1．空間の性質は，各点ごとに連続的に変わる．
2．ユークリッド幾何学は，大域的には成り立たないが局所領域では成り立っている．

Riemann は，幾何学の性格を決定する量，「曲率テンソル」を求める方法を示した．それによれば，曲率テンソルの全成分がゼロであれば幾何学はユークリッド的であるが，さもなくばユークリッド的でない．

Einstein と Minkowski の「特殊相対論」では，時間と空間とは関係しており，宇宙は3次元ではなくて4次元空間であるが幾何学はユークリッド的であることが示された．しかし，Einstein の「一般相対論」では，定数係数の線素は，x, y, z, t の関数である10個の計量テンソル成分 g_{ij} で決まるリーマン型の線素で置き換えねばならないことを示す．宇宙全体に共通な力，万有引力は時空間のリーマン幾何学的構造の結果とされ，純粋に幾何学的現象と見なされた．

リーマン幾何学の核心部分は，相対性理論においてだけでなく解析力学においても利用される．リーマン幾何学の概念と計算の方法は，解析力学においては座標変換を扱うときに利用される．

幾何学は，慣性質量に関係して力学の問題に顔をだす．慣性質量は，ニュートン方程式の左辺では「質量×加速度」の形，あるいは「運動量の時間変化の割合」の形で現れた．解析力学の原理によれば，慣性質量を特徴づける量は，運動量ではなくて運動エネルギーであることが分かっている．運動エネルギーは，一粒子の場合は $mv^2/2$ に等しいが多粒子系では，

$$T = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2/2 \qquad (15.9)$$

であたえられる．ここで，v は粒子の速度であり

$$v^2 = (\overline{ds}/dt)^2 = (dx^2+dy^2+dz^2)/dt^2 \qquad (15.10)$$

と定義される．したがって，粒子の運動エネルギーは線素 ds を含んでおり空間の幾何学に依存している．

次に，$3N$ 次元空間の線素を次の式で定義しよう：

$$\overline{ds}^2 = 2Tdt^2 = \Sigma m_i v_i^2 dt^2 = \Sigma m_i(dx_i^2+dy_i^2+z_i^2) \qquad (15.11)$$

この定義を用いれば，力学系の全運動エネルギーは，

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\overline{ds}}{dt}\right)^2 \qquad (15.12)$$

$$m = 1 \qquad (15.13)$$

と書ける．この式の意味は，次のとおりである：系の全運動エネルギーは，質量が1の一個の運動エネルギーで置き換えられる．この仮想的粒子とは，力学系の状態を記述する $3N$ 次元の配位空間の1点のことである．この空間では，1点で力学系の状態が表現できることになり，適当な次元数と幾何学できまる配位空間を考えればどんな力学系も1個の自由粒子系の力学に組み込むことができるのである．

線素 (15.11) 式の形式は，N 自由粒子系の $3N$ 次元の配位空間は，ユークリッド的であることを示している．変数

$$\sqrt{m}\,x_i, \sqrt{m}\,y_i, \sqrt{m}\,z_i \qquad (15.14)$$

が，この空間での直交座標と見なされる．座標変換 (12.4) に従って直交座標 (15.14) を曲線座標系に変換しても，幾何学は依然としてリーマン的である．この場合には，線素は最も一般的なリーマン形式 (15.7) ($n = 3N$ として) であたえられる．

今度は，座標の間に「拘束条件」が課せられている力学系を考察してみよう．この場合，二とおりの方法がある．ここでも先に見た $3N$ 次元配位空間を採り，今度は C 点の許された範囲が拘束条件，

$$f_1(x_1, \cdots, z_N) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (15.15)$$

$$f_m(x_1, \cdots, z_N) = 0$$

によって制限れさているとしよう．幾何学的に見るとこれらの条件式のおのおのは，$3N$ 次元空間の超平面を表している．これらの超平面の交線が，$n(=3N-m)$ 次元の部分空間を決定し，C点はこの空間内に閉じ込められていることになる．この部分空間は平坦なユークリッド空間ではなく，曲がったリーマン空間である．

この問題の別の解き方は，はじめから（12.8）式のように n 個の変数 $q_1, \cdots, q_n$ を用いて粒子の直交座標を表す方法である．変数 $q_1, \cdots, q_n$ は，ここでは n 次元空間の曲線座標であり，線素の方は（12.8）式の両辺を微分しそれを（15.11）式に代入して得られる．その結果は，

$$\overline{ds}^2 = \Sigma a_{ij} dq_i dq_j \qquad (15.16)$$

となる．係数 a_{ij} は q_i の関数である．この線素は，$q_1, \cdots, q_n$ が曲線座標であるだけでなく配位空間の幾何学的性質が微小領域を除けばユークリッド的でないという点で，まさにリーマン幾何学的である．例として，重心をとおる軸の周りで回転している独楽を採ってみよう．独楽の運動は，3次元の曲がったリーマン空間でのC点の運動であり，この空間で最短の距離を描いていく運動である．同様に，2原子分子の場合ならば，5次元のリーマン空間の最短距離を描く運動と見なせる．結局，力学は微分幾何学の形式に翻訳できる．

n 次元配位空間を用いる第一の方法では，$3N$ 次元のユークリッド空間にこの空間を埋めこんで考えていることに注意しておこう．一方，第二の方法では，より高次元の空間を用意することをせずに配位空間が用いられていることに注意しておこう．

《ま と め》

力学方程式の座標変換に関する不変性を考慮するなら，解析力学にリーマン幾何学の概念や方法が利用できる．力学系の運動は，n 次元リーマン空間の1個の自由粒子の運動として解析される．系の運動エネルギーが，配位空間のリーマン幾何学的な線素を決定する．

§ 6. ホロノーム力学系と非ホロノーム力学系

運動学上の拘束条件は，いつでも粒子座標の間の関係式で表されるものばかりではない．ときには，微分形式でしか表現できないものもある．たとえば，テーブル上を転がっていく球を考えてみよう．球が空間的な自由運動をしている場合の自由度は6である．球の運動が平面上に限られている場合は，重心の高さは一定であり，自由度は5である．球と平面との接点の直交座標 x, y と重心に相対的な点を表す角度 α, β, γ を用いて運動を表現することができる．球が平面を滑り落ちる場合には，5個の変数全部を用いなければならない．しかし，回転だけが許される場合には，接点は常に静止していなければならない．このことは，瞬間の回転軸は，接点をとおっていなければならないことを示す．もし，瞬間の回転軸が，テーブルの面内に制限されておれば，純粋に「回転」だけが許されており，もしそうでないときは「回転と旋回」とが混じってくる．回転だけのときの自由度は2である．接点の軌道が，x, y を t 関数として求めることで表されるならば，回転に関する条件で球の運動状態は一意的に決まる．このことは，角度 α, β, γ は x, y の関数であたえられることを示唆しているように見える．しかし，実際はそうでない．たしかに，α, β, γ の<u>差分</u>は x, y の<u>差分</u>を用いて表すことができるが，この関係式は積分可能でない．すなわち，座標を用いて表現できるような関係ではない．実際，球がある位置から運動しはじめたとして，終点と接点が一致する二つの軌道を描いた運動を比較すると，球の状態は回転に関する部分だけ異なっている．もし，角度 α, β, γ が x, y の関数として一意的に決まるとするならば，どの軌道をとおってきた場合でも最終状態は一致しなければならないであろう．

座標の間の関係としてではなく，微分形の間の関係で表される拘束条件は，Hertz によって「非ホロノーム条件」と名づけられた．拘束条件が，

$$f(q_1, \cdots, q_n) = 0 \tag{16.1}$$

と書けるときは，「ホロノーム条件」である．この式の微分から

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n = 0 \tag{16.2}$$

が得られる．しかしながら，

$$A_1dq_1+\cdots+A_ndq_n = 0 \tag{16.3}$$

（ただし，係数 A_k は座標 $q_1, \cdots, q_n$ の関数）から出発すれば，可積分条件が満たされているときだけ，(16.1) のような関係式にもどることができる．例外は，$n = 2$ のときであり，このときには常に積分可能である．

微分形の条件がホロノームか非ホロノームかは，簡単な方法で見分けることができる．3変数の最も簡単な場合を例にとってこのことを示そう．一般化することは簡単である．次の条件を考えてみよう：

$$dq_3 = B_1 dq_1 + B_2 dq_2 \tag{16.4}$$

もし，q_1, q_2, q_3 の間の関数関係式が成り立っているとするならば，

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} = \frac{\partial B_2}{\partial q_1} \tag{16.5}$$

が成り立っていなければならない．このことは逆に，係数 B_1, B_2 は，q_3 に陰に依存していてもよいことを示している．したがって，(16.5) 式は，

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} + \frac{\partial B_1}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial q_2} = \frac{\partial B_2}{\partial q_1} + \frac{\partial B_2}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial q_1} \tag{16.6}$$

と書き換えてもよく，(16.4) 式を用いて

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} + \frac{\partial B_1}{\partial q_3} B_2 = \frac{\partial B_2}{\partial q_1} + \frac{\partial B_2}{\partial q_3} B_1 \tag{16.7}$$

が得られる．この関係式は，任意の q_1 と q_2 に関して成り立たなければならないので，(16.7) は恒等的でなければならない．恒等的に成り立っているとき，(16.4) 式は積分可能となるが，もしそうでなければ，非可積分である．しかし，(16.7) 式のように，q_3 が消去された形ではなく q_1 と q_2 の関数として表される場合もあり得る．その場合には，q_3 の表式を (16.4) 式に代入して q_3 の q_1 と q_2 に関する偏微分を求めて，係数 B_1，B_2 に一致するかどうかを確かめればよい．もし，一致が見られれば，微分形の条件はホロノーム的であり，座標の間の関係としてその条件を書き直すことができる．2個以上の独立変数の場合にも，可積分の条件は，

$$\frac{\partial B_i}{\partial q_k} = \frac{\partial B_k}{\partial q_i} \tag{16.8}$$

であることが証明できる．独立な微分関係式の組があたえられている場合には，従属変数の組についてそれらを解いて，上記の方法で可積分の条件を満たすかどうかを調べればよい．

〈**問題**〉　次の関係式は，可積分の条件を満たすかどうか調べよ：

$$xdz+(y^2-x^2-z)dx+(z-y^2-xy)dy = 0. \qquad (16.9)$$

この条件はホロノーム的である．次の関係式

$$z = x^2+y^2-xy \qquad (16.10)$$

が得られる．

ホロノームな拘束条件は，二とおりの方法で扱われる．n 個の変数の間に m 個の関係式が存在するときには，変数の内の m 個を消去し，独立変数が $n-m$ 個の問題を考えればよい．あるいは，何個かの余分の変数を用い，拘束条件を補助条件と見なすこともできる．非ホロノーム条件は，第2の方法でしか扱えない．変数を消去する方法がないので，系の自由度よりも多い変数を用いなければならない．配位空間はこの場合にはより高次元空間に埋め込まれた空間を考えるが，この空間は部分空間になっていない．なぜならば，拘束条件は，幾つもの方向の線束で書かれているが，それらは包絡面を成すことがない．

力学の変分原理では，ホロノーム条件と非ホロノーム条件は非常に異なった振舞いを示す．運動方程式は，非ホロノーム条件が課せられている場合にも拡張できるが，それらはある物理量の変分から得られるものではない（第2章 § 13）．

《まとめ》 拘束条件は，いつも座標の間の関係式で表されるとは限らない．そのような関係式が存在する場合は，条件はホロノーム的であるといわれる．しかし，ときには関数関係では表されないので微分形の間の関係となることもある．この条件は，非ホロノーム条件と呼ばれる．面上を転がっている剛体が，この場合の例である．

§ 7. 仕事の関数と一般化された力

ニュートンの運動方程式の両辺は，力学の問題として根本的に異なる二つの概念が対応している．左辺には，慣性質量が現れる．これは解析力学では，運動エネルギーとして扱われる．右辺の「作用」力の方は粒子への作用をとおして外場の力学的振舞いを記述する．われわれは，力の概念は根元的で他の概念に還元できないと考えがちであるが，解析力学は力ではなくて力のなす仕事の方がより基本的なものであることを示す．力は仕事の関数から導かれる二次的

な量でしかない.

粒子の質量を m_i, 直交座標を x_i, y_i, z_i とし, 成分が

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i \tag{17.1}$$

の力 G_i が作用しているとしよう. 力は外場によるものであることもあれば, 粒子間の相互作用によるものであることもあるが, 拘束条件を実現する力は含まないとする. 力学を解析的に扱う際には, 後者に関する知識は必要でない.

いま, 粒子の座標を dx_i, dy_i, dz_i だけ動かしたとしよう. 力による仕事の変化は,

$$\overline{dw} = \sum_{i=1}^{N}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \tag{17.2}$$

であたえられる. 直交座標を (12.8) 式のように一般化座標 $q_1, \cdots, q_n$ の関数として表すことができれば, 微分 dx_i, dy_i, dz_i は dq_i で書き表すことができ, 仕事の微分$\overline{dw}$ は, 変数 dq_i に関する1次微分形式

$$\overline{dw} = F_1 dq_1 + \cdots + F_n dq_n \tag{17.3}$$

と書かれる. この式は, 力を解析力学で扱う際に, 非常に重要なものとなる. はじめにあたえた力の成分ではなくて, (17.3) 式の係数

$$F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n \tag{17.4}$$

の方が重要になる. これらは, 粒子に働いている力の成分に変わる量である. 物理量 (17.4) が力の力学的作用を完全に決定する. これらは, 元の直交空間ではなくて n 次元配位空間でのベクトル成分である. このベクトル量は,「一般化された力」と呼ばれ, 物理量F_iは「一般化された力の成分」と呼ばれる.

力学系の運動が, n 次元リーマン空間の1粒子の運動と見なすことができたように (系の慣性質量は, 1粒子の運動エネルギーの表式に現れる), すべての力の力学的作用は, 粒子の働いている1個のベクトルで表せる. このベクトルは, n 個の成分をもち, 配位空間の次元数に等しい. これらの成分は, 系の位置を微小変化させた際に力が行う全仕事に等しい1次の微分形式に現れる係数として定義される.

力学系に作用している力は, 二つのカテゴリーに分けられる. いまのところ力に関して分かっていることは, 仕事$\overline{dw}$ は1次の微分形式であるということだけであり, $\overline{dw}$ が完全微分であることも確かである. そこで, 無限小の仕事

がある関数の完全微分で表されたとしよう．その関数は「仕事の関数」と呼ばれ記号 U で記すのが習慣である．したがって，

$$\overline{dw} = dU \tag{17.5}$$

と置く．ここで，

$$U = U(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{17.6}$$

である．それゆえに，

$$\Sigma F_i dq_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \tag{17.7}$$

と書けるので，

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{17.8}$$

が得られる．現在では，仕事の関数に符号を変えたものを新しく V と定義することが多くなっている：

$$V = -U \tag{17.9}$$

この定義の利点は，エネルギー保存則の視点に立ってみるとき，V を「ポテンシャル・エネルギー」と解釈できるからである．(17.8) 式は，今度は次のように書ける：

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{17.10}$$

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_n) \tag{17.11}$$

ここで，V は位置座標の関数である．

このカテゴリーの力は，次の理由から特殊なものである．まず第1に，これらの力は，エネルギー保存則を満たしている．このために，保存力と呼ばれる．第2に，一般化された力は，n 個の成分を持つがそれらは一つのスカラー関数から導出される．力学の変分法では，第2の性質は利用されるが，エネルギー保存則を満たすという要請は不用である．

(17.6) 式による仕事の関数の定義は，少し狭すぎる．自然界には，時間依存性を持つ仕事の関数 $U = U(q_1, \cdots, q_n; t)$ から導かれるような力もある．微分形 dU を求めるとき，t は常数であると見なしておけば，(17.5) 式はそのまま成立している．その結果，(17.7) 式と (17.8) 式は成り立つが，エネルギー保

存則は破れる．一般化された力は，エネルギー保存則は満たさないような仕事の関数から求められる場合もある．たとえば，サイクロトロンでの点電荷は1回転するごとに，元の位置に戻るが運動エネルギーは増加しており，もはやエネルギー保存則は満たしていない．このことはしかし，仕事の関数が存在しないということではなくて，仕事の関数が時間の関数になっているだけである．一方，回転している剛体を支えている力に見られるように，仕事の関数を持たないがエネルギー保存則は満たしているような一般化された力もある．

保存的であるなしにかかわりなく，1個のスカラー関数から導出される力に対して特別な名称をあたえておく．本書では，monogenic（単生的という意味）な力と呼んでおく．スカラー関数から導出できない力を polygenic な力と呼んで区別する．

単生的な力に関する仕事の関数は，一般的には座標と速度の関数である：

$$U = U(q_1, q_2, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n; t) \tag{17.12}$$

例えば，磁場中の荷電粒子に働くローレンツ力は，この性質を持つ仕事の関数から導かれる．この種の力が存在する場合は，変分法的取扱が少し変更される．オイラー・ラグランジュの微分方程式（第2章　§10参照）によると，力と仕事の関数の間には次の関係が成り立つ：

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \tag{17.13}$$

これは，(17.8) の一般化された関係である．

《ま　と　め》 解析力学では，力でなく無限小変位における作用力の成す仕事の方が根本的で重要な概念である．変分法では，1個のスカラー関数（仕事の関数）から導出される力が特に重要である．この種の力は，monogenic（単生的）力と呼ばれる．仕事の関数が時間に依存しないならば，エネルギー保存則は満たされており，その関数から導出される力は「保存的」である．仕事の関数が，時間だけでなく速度にも依存しないなら，仕事の関数の符号を変えたものは，ポテンシャル・エネルギーと解釈され，力はポテンシャル・エネルギーの勾配の符号を変えたものに等しい．仕事の関数から導くことのできない力も，微小変位における仕事に

よって特徴づれけれるが，解析力学の最小値問題に定式化することはできない．

§8. 時間に依存する拘束条件と依存しない拘束条件：エネルギー保存則

これまでの議論では，時間については全く考慮しなかった．解析力学では，スカラーの力学量が時間に陽に依存するか否かは重要なことである．力学においては，すべての物理量は，時間の関数である．しかし，問題は時間が運動エネルギーないしは仕事の関数に陽に現れてくるかどうかである．

この章の§6で，ホロノームな拘束条件は，力学系の座標の間の関係として表現されるとした．しかしこの関係式は，時間に関して連続的に変化し拘束条件が，

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n; t) = 0 \tag{18.1}$$

と書ける場合がある．例えば，動いている面上に拘束されて運動している質点系がこれに当てはまる．面の運動は，

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{18.2}$$

によって表されよう．他の例は，一定の法則に従って長さの変化している振子である．この場合にも，時間を陽に含んだ補助条件が付く．

Boltzmann は，拘束条件が時間に依存するかしないかに従って「rheonomic」と「scleronomic」なる単語を用いた．拘束条件が時間に依存する場合には，適当な曲線座標系を導入して拘束条件を消去してみると，(12.8) 式には時間が陽に現れてくる．すなわち，(12.8) 式は，

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \cdots, q_n; t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_N &= f_{3N}(q_1, \cdots, q_n; t) \end{aligned} \tag{18.3}$$

と書かれる．これと同様の結論は，時間に依存する拘束条件がない場合でも動いている座標系を用いる場合にも得られる．

rheonomic な系も解析力学で扱うことができるが，scleronomic な系で得ら

れた公式の幾つかはもはや成り立たなくなる．まず第1に，(18.3) 式を時間に関して微分すると，

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\dot{q}_1+,\ \cdots,\ +\frac{\partial f_1}{\partial q_n}\dot{q}_n+\frac{\partial f_1}{\partial t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (18.4)$$

$$\dot{z}_N = \frac{\partial f_{3N}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial f_{3N}}{\partial q_n}\dot{q}_n+\frac{\partial f_{3N}}{\partial t}$$

が得られる．この結果に運動エネルギーの定義式 (15.9) を代入すると，これらは一般化された速度 $\dot{q}_i$ に関する2次形式になっていないことが分かる．速度に比例する項と定数項が新たに加わる．そのために，配位空間のリーマン幾何学という概念が使えない．この場合にも，仕事の関数 U に時間 t が陽に現れる．運動エネルギーの係数ないしは仕事の関数が時間を陽に含むか否かに関係なく，解析的結論は同じであり，いずれの場合も力学系は rheonomic になる．scleronomic か rheonomic かの本質的な違いは，前者ではエネルギーが保存されるという点である．ポテンシャル・エネルギー V を，

$$V = \Sigma\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-U \qquad (18.5)$$

で定義すると，系の全エネルギーは運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和に等しい．仕事の関数が速度に依存しないならば，ポテンシャル・エネルギーは仕事の関数の符号を変えたものに等しい．この場合には，仕事の関数 U ではなく，運動エネルギー T とポテンシャル・エネルギー V を基本的な力学量と見なすことができる．しかしながら，(18.5) 式のような一般的な場合には，仕事の関数 U を用いなければならない．もし，U が時間に依存するならば，運動エネルギーの増減をちょうど打ち消すような第2のスカラー量として「ポテンシャル・エネルギー」を定義することができなくなる．

物理学者や工学者の間では，ポテンシャル・エネルギーの概念はなじみの深いものであるが，解析力学にとっての基本的概念となればそれはポテンシャル・エネルギーではなくて仕事の関数なのである．われわれが，ポテンシャル・エネルギーという用語を用いる際には，いつも仕事の関数は (17.6) 式のような形であり $V = -U$ なる関係を暗に仮定しているのである．

rheonomic 系では，エネルギー保存則は成り立たないが，scleronomic 系では成り立っている．この理由で，scleronomic 系は保存系と呼ばれる．

《まとめ》 運動エネルギーも仕事の関数も時間を陽に含むことがある．このようなことは，拘束条件が時間に依存する場合に起きる．同様のことは，仕事の関数が時間と座標（ときには，速度）の関数となる場合にも見られる．運動エネルギーも仕事の関数もともに時間に依存しない（すなわち，scleronomic）ならば，運動方程式からエネルギー保存則が導かれる．運動エネルギーと仕事の関数のいずれか（または，両方とも）が，時間に依存する（なすわち，rheonomic）場合には，保存則は導出できない．

第 2 章 変分計算

§ 1. 極値問題の一般的性質

いつの時代でも極値問題は，興味と好奇心とを抱かせてきた．まっすぐに歩いて行くことも，極値問題の直観的解答である．すなわち，われわれは目的地までできるだけ回り道をしないで到達したいのである．諺にある「最も無理のない進路」は，最小値を求めようとする直観的願望の表現である．この願望はまた，困難にもくじけず画期的な偉業を成し遂げたいことをも含んでいる．

数学では，ある量の最大値または最小値を求める問題を極値問題という．たとえば，山の最高峰とか谷の最も低いところを捜す問題，2地点間の最短経路や光熱費を最小にする問題等が，この種の問題に属する．この種の問題に関係して，「変分計算」という数学が発展してきた．

形式的ないい方をするならば，定積分の極値問題として変分法が考え出されたのであるが，関数の極値問題は通常の微積分学で扱うことができる．歴史的には，二つの問題はほとんど同時代に考えられたが，変分法を開発した Lagrange 以前には，両者の区別は明確でなかった．古代の幾何学者 Dido の有名な問題は，積分の最小値を求める変分問題であった．アレクサンドリヤの Hero は，A点からの光が鏡で反射してB点に達する道筋は最短時間で到達できる経路であるとの原理から光の反射法則を導出した．Fermat は，この原理を拡張して光の屈折の法則を導いた．これらは，本質的に幾何学の方法を用いて解かれている．最速降下線の問題は，Bernoille によって提起され，Newton, Leipniz および彼自身によって解かれた．変分問題の一般的解法は，Lagrange の解析力学（1788）においてはじめて導入された．

変分法の形式的な手法を解説する前に，極値問題の一般的性質をよく示して

いる典型的な例題を考えてみよう．山の最高峰を求めることを考えてみる．山の高さは，解析的に一つの方程式，

$$z = f(x,\ y) \tag{21.1}$$

で表される．$f(x,\ y)$ は，$x,\ y$ の連続かつ微分可能な関数である．

最大最小問題は，その本性からして比較することから始まる．山の頂上にいると主張するためには，近くのどの地点もより低いことを示さなければならない．ここに極値問題の第1の制約が現れている．すなわち，立っている地点からうんと離れたところに，頂上よりも高いところがあるかも知れない．山の頂上は，大域的には最高峰であるかどうかは分からないが，その近傍では確かに最高峰であるということでわれわれは満足しなければならない．したがって，われわれは，完全な最大値（ないしは，最小値）という代わりに局所的な最大値（ないしは，最小値）だけを議論することになる．

しかし，このような相対的極値を求める場合でも，われわれの地点からの無限小の近傍（任意に近いところ）を調べるときにさらに制約がつく．山の頂上の場合には，無限小の近傍のどの地点も同じ高さをもつ．このことは，高さの変化率はどの方向でもゼロでなければならないことを意味している．もし仮に，いずれかの方向で高さの変化率が正であったならば，その点の近くにより高い地点があることを意味する．一方，もし変化率が負の方向があったとすると，それと反対方向——どの方向も反転できる（これも非常に重要な条件）として——に進めば変化率は正にならざるを得ない．このようにして，ある点で関数が相対的な極値をとるとすると，その関数の変化率が正の場合も負の場合もともに否定されなければならないことが分かった．このことから，関数がある点で最大値を持つためには，どの方向の変化率もゼロでなければならないという重要な原理に到達する．しかし，この条件だけではまだ極値が1個であることを保証するのに十分でない．すなわち，一つの方向からは極大であり別の方向では極小である鞍部点となる可能性もある．すべての方向での変化率がゼロであるというのも極値問題の必要条件であるが十分条件ではない．この条件が満たされている場合でも，最大値であるか最小値であるか，あるいは鞍部点であるかについて調べなければならない．

このような条件付きであっても，すべての方向での変化率がゼロの値をとる

点にわれわれが立っているということには，それ自体興味がある．というのは，その点が最大であれ最小であるにせよ，変化率がゼロということが実現する点は特別の点の群であるからである．それゆえ，これらの点には，特別の名前が付けられている．関数は，どの方向でも変化率がゼロとなるならばその点で「停留値」をもつという．

運動の問題でも，積分値の停留値を求めれば事が済むという場合がある．その場合でも，数学としての変分原理と力学への応用としての変分原理との間には顕著な違いがある．数学の立場からは，停留値の問題は実はあまり大問題ではない．なぜなら，停留値である条件が確定したなら，次にそれが真に最大値となるための条件を吟味すればよいからである．しかし，力学の変分原理では，後半部分が問題となるのは系の安定性を議論しなければならないときだけである．つまりその場合には，ポテンシャル・エネルギーの真の最小値を捜すことになる．運動の問題は，このようにして得られる最小値の条件に左右されることはない．

《ま　と　め》 関数が相対的な最大ないし最小値をとる点を求めるためには，その点の無限小の近傍における関数の性質を調べなければならない．その結果は，関数がそこで停留点をもつということである．さらに条件を課さないとそれが極値であることを保証しないが，力学の目的からは定積分が停留値をとることで十分であって，必ずしも極値である必要はなく，それ以上の解析を要しない．

§ 2.　関数の停留値

いま，関数

$$F = F(u_1, u_2, \cdots, u_n) \tag{22.1}$$

について考える．変数は，n 次元空間の点Pの直交座標と考えてよい．もう一つ次元を追加して，その座標軸上に関数値をプロットすれば，$n+1$ 次元空間内に超平面が得られる．関数 F は変数 u_k に関して連続かつ微分可能であるとする．

「一つの点の無限小の近傍を調べる」ということを，数学の言葉で定義しておこう．このときに，「変分」という用語が用いられる．しかし，通常の微積分学の記号 “d” と異なり，ここでの無限小の変化は実際に起こる独立変数の変化ではなくて，数学的思考実験によって導入される変数の組である．摺ばちの底に静止するおはじきを考えてみよう．実際に起こるおはじきの変位はゼロである．しかし，ポテンシャル・エネルギーの変化を調べるためには，おはじきをその点の近傍に動かしてみなければならない．このときの変位を，「仮想変位」と呼ぶ．「仮想的」という形容詞は，概念的変位を実現するに当たっては運動学的に許されるならいかなる手段を用いてもよいことを意味している．位置の仮想的で無限小の変位を，単に位置の「変分」と呼ぶ．対応する関数の変化——上の例では，おはじきのポテンシャル・エネルギー——は，この変分によって決まる．位置の変分は，勝手にとれるが，関数の方に現れる変化——関数の変分という——は，勝手にとれない．

このような仮想的特徴を強調するために，特別の記号を導入したのが Lagrange であった．その記号が，δ である．無限小の変化であるという点では，微積分学の d と類似の特徴を持つ．しかし，d の方は，実際に起こる変化を意味していたが，δ の方はあくまでも仮想上の変化を表すものである．定積分の変分を調べる問題では，これら2種類の変分を同時に扱わなければならないので両者の区別は非常に重要になる．

Lagrange の記号を用いて座標の無限小の仮想変位は

$$\delta u_1,\ \delta u_2,\ \cdots,\ \delta u_n \tag{22.2}$$

と書かれる．対応する関数 F の変化は，微積分の初等的規則に従って

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial F}{\partial u_2}\delta u_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial u_n}\delta u_n \tag{22.3}$$

となる．これは，関数 F の1次の変分と呼ばれる．

実際に演算をするときには無限小でなく有限の大きさの量を問題にする方が便利なので，それらを分離し，

$$\delta u_1 = \varepsilon\alpha_1,\ \delta u_2 = \varepsilon\alpha_2,\ \cdots,\ \delta u_n = \varepsilon\alpha_n \tag{22.4}$$

と置く．ここで，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は仮想変位の方向余弦で有限の大きさの量であり，ε はゼロに近付けて行く無限小の量である．この特別の方向での関数 F の

変化率は，

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial u_2}\alpha_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial u_n}\alpha_n \tag{22.5}$$

である．F が停留値をもつためにはこの量がゼロでなければならない：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k=0 \tag{22.6}$$

しかし，変位が「仮想的」であるから，どの方向も同等に考えられるので，α_k は任意に選べることから，

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{22.7}$$

が要請される．逆に，(22.7) 式が満たされておれば，(22.5) 式で表した量はゼロとなり，F は停留値をもつ．(22.7) 式は，そのための必要かつ十分な条件である．

(22.7) 式は，関数の停留値の大きさをあたえるのではなく，停留値の位置をあたえるだけであることに注意しよう．(22.7) 式の解として n 個の変数 u_1，u_2，…，u_n が得られたとし，その値をFに代入すれば関数の停留値が求められる．

《ま　と　め》 n 変数の関数 F が点Pで停留値をとる必要十分条件は，すべての偏微分係数がその点でゼロになることである．

§ 3.　2次変分

座標の仮想変位に伴う関数の無限小の変化を求めることに戻る．座標の変分を (22.4) 式で表すとすると，われわれが計算しなければならない量は

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(u_1+\varepsilon\alpha_1,\ u_2+\varepsilon\alpha_2,\ \cdots,\ u_n+\varepsilon\alpha_n)\\ &\quad -F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)\end{aligned} \tag{23.1}$$

である．この量を ε の関数と見なして，ε の級数に展開すると

$$\Delta F = \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial u_i\partial u_k}\alpha_i\alpha_k+\cdots \tag{23.2}$$

となることが分かる．関数 F が停留値をとる点では，第1項はゼロであり ΔF の値は ε の2次の項からはじまる．ε を十分小さくとれば，高次の項は無視できて

$$\Delta F = \delta^2 F/2 \tag{23.3}$$

となる．ここで

$$\delta^2 F = \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_k} \alpha_i \alpha_k \tag{23.4}$$

これは，関数 F の「2次変分」と呼ばれる．もし，$\delta^2 F$ の値が α_i をどのように選ぼうとも―― $\Sigma\alpha^2_i = 1$ を満たす限り――正ならば，点Pからどの方向でも F は増加し，その点の値が最小である．逆に，もしその値が負であるならば，Pからどの方向でも減少しその点で最大値をとる．$\delta^2 F$ がある方向では正であるが他の方向では負であれば，最大値も最小値も存在しない．したがって，2次変分の符号が，極値の存在を決定する．方程式

$$\delta^2 F = 0 \tag{23.5}$$

と書いて，この方程式の実数解 α_i が存在するかどうかを調べる．もし解が存在すれば，その点で $\delta^2 F$ の符号は変わり極値は存在しない．実数解 α_i が存在しないならば，$\delta^2 F$ の符号は変化し得ないので関数Fは極値をとる（さらに，極値が最大値か最小値かは，任意の α_i の組に対して $\delta^2 F$ の値を求めその符号を調べればよい）．

関数の2次変分については，平衡状態の近傍での小さな振動を論じるとき詳しく述べる（第5章 § 10）．そこでは，最大値か最小値かを決する厳密な条件が示される．しかし，問題によってはあらかじめ最小値が存在するとして進めることもあるので，2次変分をいちいち考えない場合もある．例えば，正の項ばかりの関数を最小にしたいならば，その関数は必ず最小値を持つことは自明である．したがって，停留値の問題が，一つだけ解を持っていたならばその解は自動的に最小値である（第4章 § 8）．

《ま　と　め》 停留値の条件が満たされているとき，それが極値である条件は，2次変分の符号に依存する．極値であるためには，2次変分の符号は可能なすべての無限小の仮想変位に対して同じ符号を保っていなければ

ならない――2次変分の符号が正であれば最小値をもち，負であれば最大値をもつ．2次変分がある方向では正であっても他の方向で負であれば，関数の停留値は極値ではない．

§4. 停留値と極値

停留値と極値の違い，および二つの問題の関連性に十分注意する必要がある．停留値は，1次変分がゼロであることを必要としたが，2次変分にはどのような制約も付けない．一方，極値の方は，1次変分がゼロであることに加えて2次変分にも条件が付く．極値問題では，この上にさらに配位空間の領域の内部で問題を扱うという制約が付く．ある関数が領域内に極値を持たないならば，領域の境界に極地を持つと考えてよい．配位空間の境界では変位は一方向だけ許されるので，1次変分がゼロという条件――もしそうでなければ，正も負も許される――はもはや成り立たない．逆方向の許されない変位に対しては，関数はその点で停留値は持たないが極値は持ってもよい．この場合，1次変分はゼロでなくとも，極値が存在する．溝を転がり落ちるボールの場合ならば，軌道の接線が水平になる最も低いところでボールは静止するであろう．しかし，その前に止め釘に引っかかって止まることもあろう．このときは軌道の接線は水平ではないが，最も低いところでボールが静止したことには間違いない．その地点は，停留点ではない．ボールが配位空間の境界に達しており，そこでの変分は一方向のみ許されるだけなので停留点の条件は満たさなくてよい．

《まとめ》 関数の極値は，逆方向も許される変分に関してだけ停留値に等しい．位置の変分が一方向だけになっている配位空間の境界では停留値はなくとも極値は存在する．

§5. 付加条件：ラグランジュの未定係数法

関数の極値問題は，いつも上に述べた形であたえられるとは限らない．点Pが変動できる配位空間は，座標の間の拘束条件のために n 次元以下に制限されていることもある．こうした拘束条件は，変分問題の「付加条件」と呼ばれる．このような条件が存在しないならば，変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はどのような制約も受けずに変動し，§ 1-3 で考察した「付加条件なし」の変分問題になる．

次に，関数

$$F = F(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) \tag{25.1}$$

に付加条件

$$f(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n) = 0 \tag{25.2}$$

が付いた場合の変分について調べる．

すぐ思い付くことは，付加条件より変数のうちの1個（例えば，u_n）を消去し，残りの変数の関数として F を表すことである．そうすれば付加条件のない $n-1$ 個の独立変数（$u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$）の変分問題として扱うことができる．この方法は，確かに正しい方法であり場合によっては有効である．しかし，変数消去は大変面倒なことであることが多い．その上，付加条件 (25.2) はどの変数も対等に扱っているので，どれか1個を従属変数とみなし他を独立変数と見なしてよい理由もない．

Lagrange は，未定係数法と呼ばれる付加条件を扱う見事な方法を考え出した．この方法では，変数の間の対称性を保ったまま付加条件のない変分問題に書き換えられる．この方法は非常に一般的であり，どれだけの数の付加条件が付いている場合にも適用できる．微分形の間に可積分でない関係式がある非ホロノーム条件や変数の間の関係としては表すことのできない付加条件の場合にも適用することができる．

ラグランジュの未定係数法がどんなものか，付加条件が (25.2) であたえられた場合を例にとって考えてみよう．この条件式の変分から δu_k の間の関係として，

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\delta u_n = 0 \tag{25.3}$$

が得られ，関数 F の変分は停留値のところでゼロであることから

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\delta u_n = 0 \tag{25.4}$$

が得られる．§ 3 で，δu_k が独立ならば (25.4) 式から $\delta F/\delta u_k = 0$ が結論されることを示した．しかし，今の場合は (25.3) 式の関係があたえられているので，そのような結論にはならない．点Pで $\delta f/\delta u_n$ はゼロでないとして，δu_n を他の変分の関数と見なして消去し，変分 δu_k は付加条件なしの変分と見なすことができる．そのためにはまず，(25.4) 式を書き直す必要がある．明らかなように，u_1，u_2，…，u_n の関数である未定係数 λ を (25.3) 式の左辺に掛けてもよい．そのようにしても，ゼロを付け足すだけなので δF の値は変わらない．したがって，

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\delta u_n + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\delta u_n\right) = 0 \tag{25.5}$$

が成り立つことになる．ゼロを足しただけであるが，関数の和を付け加えたことになり，行った変形は決して自明でない．和の中に現れた関数はゼロでなく，全部の和をとるとゼロになるというだけである．

(25.5) 式を，次のように書き換えることができる：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u_k}\right)\delta u_k = 0 \tag{25.6}$$

ここで，δu_n を消去することを考えてみよう．まず，λ の値を δu_n に関係する項がゼロとなるという条件で決定しよう．すなわち，

$$\frac{\partial F}{\partial u_n} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u_n} = 0 \tag{25.7}$$

から，λ の値を決める．こうすることで，(25.6) 式から δu_n が消去できる．その結果，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u_k}\right)\delta u_k = 0 \tag{25.8}$$

が得られる．残された変分に関しては，付加条件のない変分法が適用できる．そのようにして得られる結果は，δu_k の係数がゼロとなるということであった：

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}+\lambda\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{25.9}$$

λ を決定する条件 (25.7) 式と合わせれば，条件 (25.9) は，(25.6) 式があたかも δu_k の全部に対して付加条件なしの変分を採ったときゼロとなるとの条件に変わる．以上，ラグランジュの未定係数法の意味をまとめると次のようになる．δF がゼロになる条件を考える代わりに

$$\delta F+\lambda\delta f \tag{25.10}$$

がゼロとなる問題を考えて，付加条件を無視してすべての δu_k を独立な変分と見なせるということになる．

付加条件 $f = 0$ を考慮すれば，$f\delta\lambda$ はゼロであり，(25.10) 式から

$$\delta F+\lambda\delta f = \delta(F+f) \tag{25.11}$$

が得られる．したがって，上に述べてきたことはもっと厳密な形式に表現できる．関数 F の1次変分をゼロと置く代わりに新しい関数

$$\overline{F} = F+\lambda f \tag{25.12}$$

を考えて，任意の変分 δu_i に対してこの関数の1次変分がゼロであることを要請する．λ による方法を複数の付加条件のある場合に一般化しよう．今までと同じように，関数 F の停留値を求める問題を考えてみよう．今度は，m 個の独立な付加条件

$$\begin{aligned} &f_1(u_1, \cdots, u_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (m<n) \\ &f_m(u_1, \cdots, u_n) = 0 \end{aligned} \tag{25.13}$$

の下で考えなければならない．m 個の付加条件のために，変分 δu_k の間には，次の式で示される関係がある：

$$\begin{aligned} \delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\delta u_1+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial u_n}\delta u_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta f_m &= \frac{\partial f_m}{\partial u_1}\delta u_1+\cdots+\frac{\partial f_m}{\partial u_n}\delta u_n = 0 \end{aligned} \tag{25.14}$$

この条件を考慮すると，変分のうちの m 個は独立な変分と見なされず残りの変分の関数で表される．簡単のため後ろの方の m 個の変分が独立でないと仮

定し，残りの変数は互いに独立であるとする．

変分問題は，付加条件の下ですべての可能な変分 δu_k に対して

$$\delta F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_k} \delta u_k \tag{25.15}$$

がゼロになることを要求している．ここで，後ろの方の m 個の変分は独立な変分の関数で表しておかなければならない．しかし，そうする前に，(25.14) 式の右辺に未定係数 λ をそれぞれ掛けてその結果を (25.15) 式の右辺に加えてみる．その結果は，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial u_k}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial u_k}\right)\delta u_k = 0 \tag{25.16}$$

である．最後の m 個の δu_k を消去するには

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial u_k}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial u_k} = 0, \quad (k = n-m+1,\ \cdots,\ n) \tag{25.17}$$

を満たすように未定係数を選べばよい．その結果，

$$\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial u_k}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial u_k}\right)\delta u_k = 0 \tag{25.18}$$

が得られる．ここで，δu_k はどれも付加条件なしの変分である．したがって，δu_k の各係数は，別々にゼロとならなければならない．このことから，

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial u_k}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial u_k} = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{25.19}$$

が得られ，これらはすべての変分 δu_k が独立であるとした変分問題

$$\delta F+\lambda_1\delta f_1+\cdots+\lambda_m\delta f_m = 0 \tag{25.20}$$

から得られるものと見なしてよい．この表式では，独立な変分とそうでない変分との区別は存在しない．

(25.10) 式は，次のようにも書ける：

$$\delta(F+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_m f_m) = 0 \tag{25.21}$$

新しい原理は，次のように解釈される：F の停留値を求める代わりに，付加条件を外して独立な変分を考え新しい関数

$$\overline{F} = F+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_m f_m \tag{25.22}$$

の停留値を求めればよい．この方法は，n 個の方程式をあたえる．この他に付

加条件として m 個の方程式を加えなければならない．こうして，

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\,;\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m \tag{25.23}$$

の $m+n$ 個の未知数に対して $n+m$ 個の方程式を得る．

このようにラグランジュの未定係数法は，自由度 $n-m$ の問題を自由度 $n+m$ の問題に移して解く方法である．n 個の変数 u_k に m 個の変数 λ_k を加えておき，関数 $\overline{F}$ の停留値問題を考えると，変数 u_k の変分から前と同じ n 個の方程式が導出され，追加した変数 λ_i の変分から m 個の条件式

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \cdots,\ f_n = 0 \tag{25.24}$$

が導出される．この結果は，付加条件として要請されていたものに他ならない．こうして，変分を考えた後に付加条件が帰納的に導かれた．

ラグランジュの方法は，余分の条件（力学の問題で常に便利なものである）を導入することが許される．そうすることで独立な変数とそうでない変数の区別をする煩わしさから解放され，座標に関しての完全な対称性が保たれるのである．

《まとめ》 ラグランジュの未定係数法は，付加条件下の変分問題を付加条件のない変分問題に変更する．停留値を求めたい関数 F に付加条件のそれぞれに未定係数を掛けてその結果を加えて新たな関数を定義する．こうして定式化された新しい問題を付加条件なしの変分問題として解く．停留値に対して最終的に得られる条件式が，付加条件の下での未知数と未定係数とを決定する．

§6. 非ホロノームな付加条件

第1章 §6で見たように，力学変数に対する条件は，微分形式であたえられることもある．このようなときには非ホロノームな付加条件をもつ変分問題を扱わなければならない．この場合付加条件は，(25.13) 式ではなく，(25.14) 式のような微分形式をとる．大きな違いは，方程式の左辺に現れる量は厳密な意味での微分ではなくて，無限小量である点にある．非ホロノームな条件は次のように書かれる：

$$\overline{\delta f_1} = A_{11}\delta u_1 + A_{12}\delta u_2 + \cdots + A_{1n}\delta u_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{26.1}$$
$$\overline{\delta f_m} = A_{m1}\delta u_1 + A_{m2}\delta u_2 + \cdots + A_{mn}\delta u_n = 0$$

ここで A_{ij} は u_i の関数であるが，関数 f_i の偏微分としては表わすことのできない量である．

どれかの変数を他の変数に関して従属的であるとする方程式が存在しないので，非ホロノームな条件は変数消去法で扱うことができない．しかし，ラグランジュの方法はこの場合にも有効である．上に示してきた手続きを繰り返して，(25.20) 式に該当する式

$$\delta F + \lambda_1\overline{\delta f_1} + \cdots + \lambda_m\overline{\delta f_m} = 0 \tag{26.2}$$

が得られる．この式では，すべての変分 δu_k は付加条件のない変分として扱われる．前に行った場合と異なる唯一の点は，今度は (25.21) 式のようには表せず微分形のまま扱わなければならないことである．しかし，付加条件のある変分問題を見かけ上は条件のない変分問題に変形することができた．

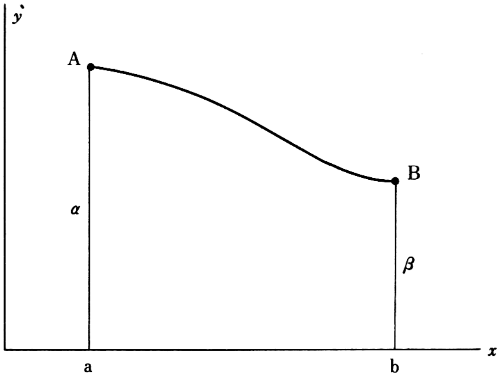
《ま　と　め》 Lagrange の方法は，非ホロノーム系にも適用できる．付加条件式の左辺に λ 因子（未定係数）を掛け，停留値を求めようとしている関数 F の変分に加える．どの変分 δu_k も条件なしの変分と見なし，得られた表式をゼロと置けばよい．

§ 7.　定積分の停留値

運動の問題には，極値問題の特別の形式，すなわち，定積分の停留値を求める形式のものがある．この極値問題を扱う数学は変分学と呼ばれる．典型的な問題は，最速降下曲線の問題であり，J. Bernoulli (1696) によってはじめて定式化された．

これは変分問題の最も初期のものである．点Aを出発して点Bに滑り落ちる時間が最短であるような滑らかな曲線を決定する問題である．いま，求めたい曲線を

$$y = f(x) \tag{27.1}$$



第2図

であるとしよう．最小にしなければならない時間は，積分

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\alpha-y}}dx \tag{27.2}$$

であたえられる．ここでyは求めたい x の未知関数である．可能な $y = f(x)$ のうちで，t の値が最小になる $f(x)$ を求めるのである．一般的な条件としては，y は x の連続かつ微分可能であり，連続な接線をもつことである．曲線の両端は固定されており，y は次のような境界条件を満たさなければならない：

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta \tag{27.3}$$

これらの条件を満たす関数は1個だけ存在する．

この問題は次のように一般的な形に定式化される．3変数の関数

$$F = F(y, y', x) \tag{27.4}$$

があたえられている（上の例では，F は x に依存しなかったが，そのような制限は不用）．一方，定積分は

$$I = \int_a^b F(y, y', x)dx \tag{27.5}$$

であたえられ，境界条件はここでも

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta \tag{27.6}$$

である．問題は，適当な条件下で積分 I を最小にするか少なくとも停留値をと

るような関数

$$y = f(x) \tag{27.7}$$

を求めることである．

一見するとこの問題は関数 $F(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ の極値ないしは停留値を扱った以前の問題と非常に異なるように見えるかも知れない．関数ではなくて，定積分の値を最小にしなければならない．そのうえ，変数の組 $u_1, \cdots, u_n$ でなくて，未知関数 $f(x)$ があたえられているだけである．しかし，よく見るとこの問題の数学的側面は以前に扱った問題とさほど差のないものであることが分かる．

ここで，Hilbert の導入した「関数空間」の概念を利用することにしよう．任意の連続関数 $y = f(x)$ は，区間［a，b］でフーリエ級数に展開できることはよく知られている：

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \xi + a_2 \cos 2\xi + \cdots + b_1 \sin \xi + b_2 \sin 2\xi + \cdots \tag{27.8}$$

ここで，

$$\xi = \frac{2\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

とした．級数展開の係数は，一意的に決まる．それゆえ，係数の有限個の組 a_0, a_1, …,

展開の誤差が十分に小さくなるよう十分大きくとらなければならない．これらの係数は，$2n+1$ 次元空間の 1 点Pの直交座標として用いることができる．この描像では，どんな関数も多次元空間の 1 点に写像される．積分値 I はもう 1 個余分に付け足される次元を用いて表すことができる．このようにして，多次元空間での超平面の描像に到達する．関数 $f(x)$ の小さな変化は，点Pの位置の小さな変分で表される．定積分 I を最小にする関数 $f(x)$ を求めることは，$2n+2$ 次元空間の超平面の最も低い点の座標を求めることと読み換えられる．これは，前節で考察した問題に他ならない．

Euler は，微積分学に特に頼らなくても，この種の問題は簡単な方法で解けることを示した．定積分は級数和で表したとき項数を増やしていくとしだいに積分値に近付くことが利用された．さらに，導関数は差分による勾配で置き換

えられることも利用する．このときの不可避的な誤差はいくらでも小さくすることができる．

微積分学の通常の方法に従って，区間 [a, b] を小区間に分割し，横軸の値を

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1} = b \tag{27.9}$$

とし，対応する縦軸の値を

$$y_0 = \alpha,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ y_{n+1} = \beta \tag{27.10}$$

と置く．ただし，

$$y_k = f(x_k) \tag{27.11}$$

である．そこで，導関数 $f'(x)$ を差分で置き換える：

$$z_k = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_k} = \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k} \tag{27.12}$$

さらに，積分は和で置き換える：

$$S = \sum_{h=0}^{n} F(y_k,\ z_k,\ x_k)(x_{k+1}-x_k) \tag{27.13}$$

このときの誤差は，$\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ をゼロに近付けるとき，いくらでも小さくなる．定積分を (27.13) 式で近似し，この級数和の停留値問題を考える．新たに設定した変分問題は，通常のものと変わらない．関数 S は，y_1，…，y_n ――これは今までの u_1，…，u_n に該当する――の関数と見なされる．関数 S の停留値は，S を y_k で偏微分しそれらがすべてゼロであるとすることで得られる．次に，これらの条件は，Δx_k をゼロに近づけるときどのように振舞うかを調べればよい．

その前に，極限ではその差が無視できる程度に (27.13) 式を変形しておく．y_k と y_{k+1} の差はいくらでも小さくすることができるので，$F(y_k,\ z_k,\ x_k)$ を $F(y_{k+1},\ z_k,\ x_k)$ で置き換えてもよい．それゆえ，求めたい関数は

$$S' = \Sigma F(y_{j+1},\ z_j,\ x_j)(x_{j+1}-x_j) \tag{27.14}$$

と定義される．

S' の y_{k+1} に関して偏微分をとるとき，(27.12) 式の z_k の表式によれば

y_{k+1} はこの和の中に2回，すなわち，$j = k$ と $j = k+1$ の項，現れることに注意する．したがって，y_{k+1} に関する S' の偏微分は

$$\frac{\partial S'}{\partial y_{k+1}} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_k}(x_{k+1}-x_k)+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=x_k}-\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x=x_k+1} \quad (27.15)$$

であたえられる．$\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ で割ると，この式は次のように書ける：

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{x=x_k} = 0,\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \quad (27.16)$$

これが，和 S' が停留値を持つための必要十分条件である．ここで両端の値，y_0 と y_{n+1} は，固定されていることに注意する．これらが未知なら，(27.16) 式の他に2個の境界条件を加えなければならない．

$\Delta x\to 0$ の極限で，差分方程式 (27.16) は微分方程式に変わる．さらに，点 x_k は区間 [a, b] のどの点の近くのものもとり得るので，差分方程式は全区間で成り立っていなければならない：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,\ (a\leq x\leq b) \quad (27.17)$$

この基本的方程式は，Euler と Lagrange により独立に発見された．通常，オイラー・ラグランジュ方程式と呼ばれる．この方程式は，定積分を級数の和で近似し，和が停留値を持つという条件から初等的な方法で得られたものである点に注目しておこう．

変分法の基礎方程式を導く上に述べた方法は，本質的点で Euler によるものであるが，数学の立場から厳密に見ると，必ずしも保証されない2重極限をとっている点に問題が残る．この問題点は，次の章で解説するラグランジュの方法には現れない．

《まとめ》 未知関数とその導関数を含む定積分の最小値を求める問題は，多変数関数を最小にするという初等的問題に還元される．そのためには，積分を級数の和で近似し，微分を差分に置き換えなければならない．1次微分がゼロになる条件が，オイラー・ラグランジュの微分方程式に結び付く差分方程式の形になる．

§ 8.　変分計算の基本的手法

Lagrange は定積分の最小値を求める問題では，通常の微積分学の方法と異なる工夫が必要である点に気づいていた．彼の開発した方法では，Euler が用いた極限操作は不用になり直接に変分問題を解くことができる．

定積分 (27.5) の停留値をあたえる関数 $y = f(x)$ について考察する．停留値が一つ確かに存在することを示すには，この関数から僅か外れたもう一つの関数 $y = \overline{f(x)}$ による積分値を求め，このときの積分値の変化率がゼロになることを示さなければならない．

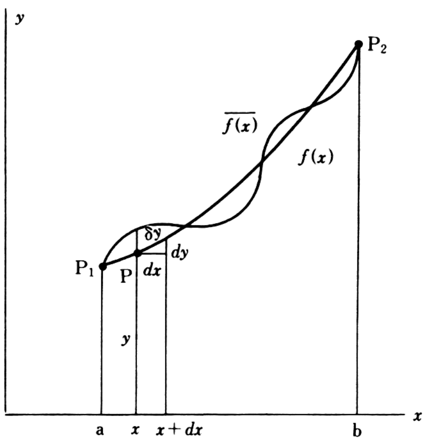
ここで，新たな関数を

$$\overline{f(x)} = f(x) + \varepsilon\phi(x) \tag{28.1}$$

と置く．ただし，$\phi(x)$ は $\overline{f(x)}$ 同様に連続の条件を満たす任意の関数でなければならない．すなわち，$\phi(x)$ は連続可微分な関数でなければならない．

変分問題の解となる関数 $f(x)$ は，少なくとも1回は微分可能な関数族から選ばなければならない．さもないと，積分 $F(y, y', x)$ が定義されない．しかし，ここではさらに全領域で $f''(x)$ が存在するという条件を加えておく（$\phi(x)$ はこの条件を満たす必要はない）．

パラメータ ε を用いることで，$f(x)$ の変化をどれだけでも小さくできる．そ



第3図

れには，ε をゼロに近付ければよい．

独立変数の任意に特定された点 x での元の関数 $f(x)$ と新しい関数 $\overline{f(x)}$ の値を比較して，二つの関数の間の差を求める．この差は，関数 $f(x)$ の「変分」と呼ばれ，

$$\delta y = \overline{f(x)} - f(x) = \varepsilon\phi(x) \tag{28.2}$$

と書かれる．いままでに学んだ位置の変分の場合と同様に，関数の変分も二つの特徴を備えている．パラメータ ε はゼロに近付けられるから，変分は無限小の変化を表す．第二に，任意に変化させてよいのでこれらは仮想的変化である．したがって，連続の条件を満たす限り $\phi(x)$ は任意の関数である．

δy と dy の基本的違いに注意しよう．どちらも関数 y の無限小の変化であることは変わりない．しかし，dy は独立変数が dx だけ変化した際の関数の無限小の変化であるが，δy は新しい関数 $y+\delta y$ を定義するときの無限小変化である．独立変数 x の変分とは関係なく関数 y を変化させるのが，変分の手法の特徴である．この意味で，常に

$$\delta x = 0 \tag{28.3}$$

としてよい．さらに，関数 $f(x)$ が両端の値 $f(a)$,$F(b)$ が固定されているならば，その値の変分はとらない：

$$[\delta f(x)]_{x=a} = 0 \tag{28.4}$$

$$[\delta f(x)]_{x=b} = 0$$

このようにしておくとき，「有限区間での変分」を考えることができる．

《まとめ》 変分の計算においては，関数 $y=f(x)$ の仮想的な無限小変化を考える．変分 δy は点 x での y の無限小変化を表す．変分の計算において，独立変数 x は何の関与もしない．

§ 9. δ をとる手続きの交換性

関数 $f(x)$ の変分は，新しい関数 $\varepsilon\phi(x)$ を定義する．この関数の導関数を求めることができる．一方，新しい関数 $\overline{f(x)}$ と元の関数 $f(x)$ 導関数も求めることができる．この二つの差を，導関数 $f'(x)$ の変分と呼ぶのが自然である．

第一の場合には，「変分の導関数」が得られる：

$$\frac{d}{dx}\delta y = \frac{d}{dx}[\overline{f(x)}-f(x)] = \frac{d}{dx}\varepsilon\phi(x) = \varepsilon\phi'(x) \tag{29.1}$$

第二の場合には，「導関数の変分」を得る：

$$\delta\frac{d}{dx}f(x) = \overline{f'(x)}-f'(x) = (y'+\varepsilon\phi')-y' = \varepsilon\phi'(x) \tag{29.2}$$

それゆえ，

$$\frac{d}{dx}\delta y = \delta\frac{d}{dx}y \tag{29.3}$$

が得られ，変分の導関数と導関数の変分は等しいことが分かる．

同様にして，定積分の変分を考えることができる．この変分は，新しい関数 $\overline{f(x)}$ を用いたときの定積分と元の関数 $f(x)$ を用いたときの定積分の差によって定義される：

$$\begin{aligned}\delta\int_a^b F(x)dx &= \int_a^b \overline{F(x)}dx-\int_a^b F(x)dx \\ &= \int_a^b[\overline{F(x)}-F(x)]dx = \int_a^b \delta F(x)dx\end{aligned} \tag{29.4}$$

したがって，

$$\delta\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \delta F(x)dx \tag{29.5}$$

この結果は，定積分の変分は変分の定積分に等しいことを示している．

《ま と め》 δ をとる手続きは，次の二つの特徴を備えている：

(a) 変分と微分演算は可換である．

(b) 変分と積分演算は可換である．

§10. 変分計算による定積分の停留値

§7で扱った変分問題をもう一度考えてみよう．今度は，変分法を用いる．境界条件が (27.6) 式であたえられているとし，定積分 (27.5) の停留値を求め

る．この問題を解くには，関数 $y = f(x)$ の変分に伴う定積分値の変化の割合を求めなければならない．まず，関数 $y = f(x)$ の変分による被積分関数 $F(y,\ y',\ x)$ の変分を求めることからはじめる（F は3個の変数，$y,\ y',\ x$，の関数であり，変分の手続き中にはこの関数自体は決して変化しないことに注意）．すなわち，

$$\delta F(y,\ y',\ x) = F(y+\varepsilon\phi,\ y'+\varepsilon\phi',\ x)-F(y,\ y',\ x)$$

$$= \varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi+\frac{\partial F}{\partial y'}\phi' \right) \qquad (210.1)$$

テーラ展開の高次の項は，ε をゼロに近づけるとき無視してよい．

さて，定積分 (27.5) の変分を求めることにしよう．それは，

$$\delta\int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx = \varepsilon\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi+\frac{\partial F}{\partial y'}\phi' \right)dx \qquad (210.2)$$

であたえられる．定積分の「変化の割合」を求めるためには，通常の関数 $F(u_1,\ \cdots,\ u_n)$ の停留値問題を扱った§ 2で示したように，(210.3) 式を無限小のパラメータ ε で割っておかなければならない．したがって，積分 I が停留値をとるときゼロとなるべき量は次の量である：

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = \int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi+\frac{\partial F}{\partial y'}\phi' \right)dx \qquad (210.3)$$

代数的形式に表現できないにしても $\phi(x)$ と $\phi'(x)$ とは独立ではないので，(210.3) 式はこのままの形式ではこれ以上の解析は進められない．この難点は，部分積分の手続きを使って解消できる．(210.3) 式の第2項は，部分積分で

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\phi' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\phi \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)\cdot\phi dx \qquad (210.4)$$

となるが，定義から積分の上下限 a,b で $\phi(x)$ はゼロであるから，この式の右辺の第1項はゼロである．この結果，(210.3) 式は

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = \int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right)\phi dx \qquad (210.5)$$

と書かれる．簡単のため，次の記号を導入する：

$$E(x) = \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \qquad (210.6)$$

積分 I が停留値をもつ条件は,

$$\int_a^b E(x)\phi(x)dx = 0 \tag{210.7}$$

と書かれる.

この積分は, $E(x)$ が区間 [a, b] の至るところでゼロになるときだけ, 任意の関数 $\phi(x)$ に対して消えることを証明することは困難でない. 実際, 関数 $\phi(x)$ が $x=\xi$ の任意の小区間以外では至るところでゼロとなるものを選ぶこともできる. しかし, この区間では $E(x)$ は事実上一定と見なせるから, 積分記号の外に移してよい[1]:

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = E(\xi)\int_{\xi-\rho}^{\xi+\rho}\phi(x)dx \tag{210.8}$$

不可避的な誤差は, ρ をゼロに近づけることでいくらでも小さくできる. 積分の方は勝手な値がとれるので, $\delta I/\varepsilon$ がゼロに近づくためには (210.8) 式の因子がゼロにならなくてはならない. 点 $x=\xi$ は区間 [a, b] のどこに選んでもよい. したがって, 区間全域で微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{210.9}$$

が得られる. δI がゼロになるためには, この条件が必要である. 一方, (210.5) 式の被積分関数がゼロならば積分もゼロになるので, この条件は十分条件でもある. 微分方程式 (210.9) が境界条件 (27.6) の下で定積分 I が停留値をもつための, 必要十分条件である.

《問題1》 1階と2階の導関数を含む定積分を考える:

$$I = \int_a^b F(y, y', y'', x)dx \tag{210.10}$$

積分の変分を求め, 部分積分の方法を2回適用して停留値に対する条件を求めよ. 微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \tag{210.11}$$

と y と y' とが両端で固定されているときゼロとなる境界項

1) $E(x)$ は連続関数と仮定した.

$$\delta I = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''} \right)\delta y + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y' \right]_a^b \tag{210.12}$$

を導け．

《まとめ》 境界条件 $y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$ の下で，積分

$$\int_a^b F(y,\ y',\ x)dx$$

が停留値をとるための必要十分条件は，オイラー・ラグランジュの微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

が満たされることである．

§11. 自由度 n の場合のオイラー・ラグランジュの微分方程式

力学の変分問題は，次のように定式化される．定積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ \dot{q}_1,\ \cdots,\ \dot{q}_n\ ;\ t)dt \tag{211.1}$$

の停留値を求めよ．ただし境界条件は，両端，t_1 と t_2 で

$$[\delta q_k(t)]_{t=t_1} = 0,\ [\delta q_k(t)]_{t=t_2} = 0 \tag{211.2}$$

（したがって，そこでの変分はゼロ）とする．変数 $q_1,\ \cdots,\ q_n$ は t の未知関数であり，実現される運動は境界条件 (211.2) を満たす任意の独立な q_k の変分に対して，積分 I が停留値をとる

$$\delta I = 0 \tag{211.3}$$

という条件で決定される．

どれか一つの変数 q_k を選び，残りの変数は一定に保っておいた上でこの変数だけ動かすこともできる．今の問題に当てはめて考えてみると，微分方程式 (210.9) を利用することができる．そこでの y が q_k に，y' が $\dot{q}_k$ に該当する．独立変数 x は，時間 t に該当する．関数 F は L であり，積分の範囲は

t_1 から t_2 までである．したがって，

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0,\ (t_1 \leq t \leq t_2) \tag{211.4}$$

が得られる．この方程式は，どの q_k に対しても成り立たなければならないので，(211.4) 式の k は1から n まで変わる．

今までの変分は特別のものであった．すべての q_k に関して同時に変分をとることで何か条件が加わりはしないか心配である．しかし，無限小の手続きに関しては，重ね合わせの原理が成り立っているのでそのような心配はない．q_k だけを変化させたことに伴う変分を $\delta_k I$ とする．そうすれば，すべての q_k に関して同時に変分をとったときの合計は

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I + \cdots + \delta_n I \tag{211.5}$$

となる．微分方程式 (211.4) は，$\delta_k I = 0$ を保証している．この微分方程式がすべての k に関して成り立つならば，δI は任意の q_k の変分に関してもゼロとなる．

こうして，有限区間での任意の q_k の変分に対する積分 I の停留値を求める問題が解けた．I が停留値をとる条件は，微分方程式の組

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{211.6}$$

が同時に成り立つことである．これは，「オイラー・ラグランジュの微分方程式」と呼ばれる．力学の場合には，「ラグランジュの運動方程式」と呼ばれる．

関数 L が幾つかの $\dot{q}_k$ について線型であるような特異な場合を除けば，偏微分 $\partial L/\partial \dot{q}_k$ はすべての $\dot{q}_k$ を含んでおり，時間 t で微分するとすべての2階微分 $\ddot{q}_k$ が現れる．得られる方程式は $\ddot{q}_k$ について代数的に解くことができる．その結果，微分方程式 (211.6) は次のように書き換えられる：

$$\ddot{q}_k = \phi_k(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\ ;\ \dot{q}_1,\ \cdots,\ \dot{q}_n\ ;\ t) \tag{211.7}$$

2階連立微分方程式の解の組は，$2n$ 個の積分定数を持ち，(211.7) 式の一般解は

$$q_k = q_k(A_1,\ \cdots,\ A_n\ ;\ B_1,\ \cdots,\ B_n\ ;\ t) \tag{211.8}$$

であたえられる．積分定数 A_k および B_k は境界条件によって決定される．この変分問題では有限区間での変分に限定した．このことは，$t = t_1$ と $t = t_2$ で

q_k は固定されていたことを意味する．そのことが，$2n$ 個の境界条件として現れ，積分定数 A_k と B_k を適切に選ぶことで実現される．力学では，境界条件はたいていの場合初期条件としてあたえられる性質のものである．積分定数が $2n$ 個であることから，位置座標と速度の初期値は任意に選ぶことができる．

《まとめ》 n 個の未知関数を含む定積分が与えられていて，この積分が停留値を持つ条件を求めるとき，これらの関数の変分は独立にとることができる．その結果，個々の関数に関してオイラー・ラグランジュの微分方程式が得られる．これは，n 個の 2 階微分方程式である．この微分方程式の解が，$2n$ 個の積分定数をもつ n 個の未知関数を決定する．

§12.　付加条件を伴った変分

再度，変数 $q_1, \cdots, q_n$ の間に付加条件が課されて，付加条件が次の関数関係で表される問題を考えてみよう：

$$
\begin{aligned}
f_1(q_1, \cdots, q_n ; t) &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
f_m(q_1, \cdots, q_n ; t) &= 0
\end{aligned}
\tag{212.1}
$$

この場合でも変数を消去する方法で $n-m$ 自由度の問題に移して扱うことは可能であり，オイラー・ラグランジュの微分方程式が得られるであろう．しかし，変数消去法は手間のかかることが多い上に，変数の間の付加条件から見ると独立変数と従属変数とに分けることは少し人工的な感がある．ここでは再び § 5 で用いたラグランジュの未定係数法を利用してこの問題を解くことにする．

(212.1) 式の変分は，

$$
\begin{aligned}
\delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n}\delta q_n \\
&\cdots\cdots \\
\delta f_m &= \frac{\partial f_m}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial q_n}\delta q_n
\end{aligned}
\tag{212.2}
$$

となる．この方程式群は，任意の時刻において成り立っている．ラグランジュの未定係数法によって，これらの方程式に未定係数 λ_i を掛ける．付加条件は独立変数 t のすべての値に対してあたえられたから未定係数も同様にすべての t の値に対して導入できると結論される．結局，未定係数は t の関数ということになる．さらに，未定係数を掛けて付加条件の総和をとることは，時間積分をとることに等しい．したがって，ラグランジュの未定係数法は，次のように定式化される．問題の積分 I の変分をゼロにする代わりに，そのことを次のように変形する：

$$\delta I' = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2}(\lambda_1\delta f_1 + \cdots + \lambda_m \delta f_m)dt = 0 \tag{212.3}$$

積分 I の変分に付け足された項は実際にはゼロなので，この置き換えは確かに許されるものである．(212.3) 式の第1項は，部分積分によって次のように変形される：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2}[E_1(t)\delta q_1 + \cdots + E_n(t)\delta q_n]dt \tag{212.4}$$

(212.3) 式の2種類の積分を一つにまとめ δq_k に比例する項を整理する．最後の方の $n-m$ 個の δq_k を (212.2) 式を使って消去してもよいが，そうする代わりに δq_k の掛かる因子の方をゼロとするように λ_k を選ぶことにしよう．このようにすれば，残りの q_i は付加条件なしの変分となり，δq_i の係数が全領域でゼロという先に得た結論に再び達する．しかし，付加条件に関する条件を加味すれば，どの変数を独立なものとし他を従属と置いたかに関係なくすべての δq_k の係数がゼロであるという結論になる．得られる微分方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_k} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial q_k} = 0 \tag{212.5}$$

である．この結果は，次の変分問題と同じである．付加条件 (212.1) の下で定積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{212.6}$$

の変分を考える代わりに，新たな関数の定積分

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt \tag{212.7}$$

の変分問題を考える．ここで，

$$L' = L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m \tag{212.8}$$

であり，ここでは，付加条件について配慮する必要はなくなっている．

ここでも一般論で述べたように未定係数は，変分の手続きとの関連ではいつでも定数と見なされる．それらは，t の未知関数とすることもできる．このような見方に立てば，λ_i に関する変分からあたえられた付加条件が帰納的に導かれる．

微分方程式 (212.5) の解は，m 個の付加条件を満たしていなければならない．この条件で，λ_i が t の関数として決定される．初期条件として $n-m$ 個の位置座標と初速度が任意に決定でき，残りの q_i と $\dot{q}_i$ は付加条件によって決定される．このことは，考えている系が $n-m$ 個の自由度系であり補助座標を導入したのは単に数学的便宜さからきていたことと一致している．

《ま　と　め》 付加条件を考慮するときも，ラグランジュの未定係数法では，余分の変数を消去する手間を省き，変数の数を減らさずに付加条件を考慮できる．変分問題の被積分関数 L は，付加条件に未定係数 λ_k を掛けたものを加える形に変形される．新たな変分は，付加条件なしの変分となる．未定係数は，付加条件を満足するという条件によって t の関数として帰納的に決定される．

§ 13. 非ホロノームな条件

変分問題の付加条件が変数の間の関数関係ではなく，第 1 章§ 6 や第 2 章§ 6 で論じたように差分の間の関係であたえられる場合でも，ラグランジュの未定係数の方法を用いることができる．この場合，$\partial f_1/\partial q_k$ を非ホロノーム条件 (26.1) の係数 A_{ik} で置き換えた形式の方程式 (212.5) が得られる．違いは，初期条件だけに関係している．座標 q_i は今度はいかなる条件も付いていないが，差分の方は条件付けられている．したがって，すべての q_i の初期値は自由

に設定される．しかし，初速度の方は方程式

$$A_{i1}\dot{q}_1+\cdots+A_{in}\dot{q}_n = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{213.1}$$

を満たさなければならない．n 個の初期位置と $n-m$ 個の初速度は任意に設定できる．

m個の方程式 (213.1) は，m個の初速度を消去する手段としてのみではなく，運動方程式に現れた未定係数を決定する役割をも持っている．

非ホロノームな条件が，時間に依存する場合は特に注意を要す．そこでは変分を瞬間的にではなくて無限小の時間間隔にわたってとったとき，変分 δq_k の間にどんな関係が発生するかを知っておかなければならない．初期条件は，したがって，

$$A_{i1}\delta q_1+\cdots+A_{in}\delta q_n+B_i\delta t = 0 \tag{213.2}$$

となり，A_{ik}, B_i は，一般には q_i と t の関数である．仮想変位 δq_k は時間の変分をとることなく実行されるので，運動方程式には B_i は現れない．しかし，速度の間に次の関係がある：

$$A_{i1}\dot{q}_1+\cdots+A_{in}\dot{q}_n+B_i = 0 \tag{213.3}$$

《ま と め》 非ホロノームな付加条件のある変分問題も，ある関数の変分がゼロとなる形式に還元できる．しかし，未定係数法を利用すれば，ホロノームな条件の場合と同様にして運動方程式は導かれる．

§14. 等周条件

付加条件が座標の間の代数的関係としてではなく，定積分

$$\int_{t_1}^{t_2} f(q_1, \cdots, q_n, t)dt = C \tag{214.1}$$

であたえられている場合もある．周囲の長さが一定のとき，面積が最大の図形を求める最古の極値問題 (Dido の問題) はこの形式に表されるので，この種の付加条件は等周条件と呼ばれる．

一般に付加条件として (214.1) 式の形式のものを何個でも考えられる．複数個の条件のある場合への一般化は自明なので，まず，1個の場合だけを考察す

ることにしよう．

付加条件 (*214.1*) は，(*211.1*) の定積分 I を定常にする t の関数 q_1，…，q_n に対してだけでなく $\overline{q_1}$，…，$\overline{q_n}$ に対しても同様に成り立たなければならない．したがって，(*214.1*) 式の変分をとると，δq_1，…，δq_n の間に次のような積分で表された関係が得られる：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\delta q_n\right)dt \ = \ 0 \qquad (214.2)$$

それゆえ，変分問題は付加条件 (*214.2*) の下で，方程式

$$\delta I \ = \ \int_{t_1}^{t_2}[E_1(t)\delta q_1+\cdots+E_n(t)\delta q_n]dt \ = \ 0 \qquad (214.3)$$

を満たすように定式化される．この場合も，(*214.2*) 式の左辺に未定係数 λ を掛けて，δI の式に追加すればよい．その結果，

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(E_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)\delta q_1+\cdots+\left(E_n+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)\delta q_n\right]dt \ = \ 0 \qquad (214.4)$$

が得られる．ここで dt を Δt に置き換え，積分を和で近似する．Δt をゼロに近付けるといくらでも定積分に接近させることはできる．前と同じような理由から，ここでの未定係数 λ は任意の変分 δq_k に関して積分 (*214.4*) がゼロになるようにすれば決められる．このことは，Δt に無関係に成り立つので，極限 $\Delta t\to 0$ でも成り立つ．それゆえ，適切な λ を選んでおけば，任意の変分 δq_k に対して

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L+\lambda f)dt \ = \ 0 \qquad (214.5)$$

なる変分原理が導かれる．この結果を見ると，変分関数 L を未定係数 λ を用いて

$$L' \ = \ L+\lambda f \qquad (214.6)$$

と置き換えると，条件つき変分問題が付加条件なしの変分問題に書き直されることが分かる．

以上の結論は，§12の結論と同じである．われわれは，(*212.5*) 式を再び見出すことになるが，違いは今度の未定係数 λ_i は定数であり t にはもはや依存していない点である．定数は，初期条件から決められる．

上に述べた方法は，等周条件が q_k だけでなく $\dot{q}_k$ にも依存するような場合，すなわち

$$\int_{t_1}^{t_2} f(q_1, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n; t)dt = C \tag{214.7}$$

の形を持つときにも適用できる．このような条件は，摩擦のない鎖の運動（第3章§4）の問題に現れる．

《ま と め》 ラグランジュの未定係数法は，あたえられた定積分が一定の値を保つという付加条件の場合にも適用できる．得られる方程式は，代数的関係式で条件が表された場合と同じである．違いは，未定係数が定数であって t にはもはや依存していない点だけである．

§15. 変分計算と境界条件 —— 弾性棒の問題[1)]

これまでの考察では主に定積分が停留値をとるという問題の解として得られる微分方程式について論じてきた．部分積分を行ってこれらの方程式を導出してきたが，このとき定積分が二つの部分，すなわち，領域全体での積分項と境界項，に分かれることが分かった．境界項の方は，いつも境界条件によって消すことができたので特別の注意を払う必要はなかった．しかし，境界項が無視できなくなる場合もある．運動方程式を偏微分方程式に定式化するハミルトンの理論の節では，いままで無視してきた境界項が重要になることを示す．ここでは，境界項が物理的に重要になるもう一つの側面を見ておこう．

微分方程式の解を一意的に決定するには一定数の境界条件が必要である．境界条件の方は，物理的考察によって決められなければならない．しかし，考えている物理的状況が境界条件を特定できなかったり，解の一意性を保証するに十分な数だけの境界条件をあたえなかったりすることもある．例として，連続体力学の問題を考えてみよう．水平に置かれた弾性棒の両端を固定しておき荷重を加えたとしよう．この棒の横方向の変位についての微分方程式は，4階微

1) この節で扱う問題は，Courant と Hilbert の教科書（第1巻，206—207頁）に詳しく述べられている．変分計算と境界条件の関係は，それ自体としても興味ある課題であるだけでなく，弾性体の安定性のほかにも多くの問題において重要になる．

分まで含み，4個の境界条件が必要である．今，棒の両端が固定されているとすると，両端での変位だけでなくそれらの1階微分もゼロにとることができる．合計4個の境界条件がこうして指定できた．しかし，単に両端を支えただけの場合には，両端での変位の方は確かにゼロであるけれども，その微分までは指定できないので合計2個の境界条件しか見つからない．残りの境界条件は一体どこからくるのであろうか．

変分問題の特に優れた特徴の一つは，必要十分な数だけの境界条件をいつも自動的に備えている点である．系の外部状況からは設定されないこれらの境界条件は，変分問題の性格から決まる．オイラー・ラグランジュの微分方程式を完備なものにするためであるだけでなく，これら余分の条件は停留値の条件自体が必要なのである．これら余分の条件は δI の境界項に関係している．「付け加えられた」境界条件と「自然な」境界条件を加味してはじめて一意的な解が得られる．この原理を剛体棒を例にとって説明しておこう．棒の平衡状態は，ポテンシャル・エネルギーを最小とする条件で決定される．ここでは，剛体棒の弾性エネルギーの表式は他の本に譲ることにする．棒の長さを l とし，0から l までの値をとる独立変数を x とし，この値で位置を標識する．棒に荷重を加えたときの垂直方向での変位を $y(x)$ と置く．単位長さ当たりの荷重の大きさを $\rho(x)$ とする．棒の断面積はどこでも一定であるとする．弾性力によるポテンシャル・エネルギーは，

$$V_1 = \frac{k}{2}\int_0^l (y'')^2 dx \tag{215.1}$$

であたえられ，重力に伴うポテンシャル・エネルギーは

$$V_2 = -\int_0^l \rho y dx \tag{215.2}$$

であたえられる．したがって，最小にしなければならない積分は

$$I = \int_0^l \left(\frac{k}{2}y''^2 - \rho y\right) dx \tag{215.3}$$

である．

この変分問題のオイラー・ラグランジュの微分方程式は，

$$k y''''(x) = \rho(x) \tag{215.4}$$

であたえられる（(210.11) 式，参照）．この方程式が満たされていれば，変分 δI は境界項だけになり，次のようにあたえられる（(210.12) 式，参照）：

$$\delta I = k[-y'''(l)\delta y(l)+y'''(0)\delta y(0) +y''(l)\delta y'(l)-y''(0)\delta y'(0)]$$

1．固定端

この場合の境界条件は

$$y(0) = 0,\ y(l) = 0, \qquad (215.6)$$
$$y'(0) = 0,\ y'(l) = 0$$

であたえられる．固定された量の変分はゼロであるから，(215.5) 式の右辺はゼロであり，結局，$\delta I = 0$ の条件は微分方程式 (215.4) が成り立つことになる．この問題では，境界条件は問題を設定した段階で全部決定されており，それ以上の境界条件を追加する必要はなかった．

2．支持端

境界条件は

$$y(0) = 0,\ y(l) = 0 \qquad (215.7)$$

だけである．したがって，$\delta y'(0)$ と $\delta y'(l)$ は任意に決められるから (215.5) 式は次の2条件を要求する：

$$y''(0) = 0,\ y''(l) = 0 \qquad (215.8)$$

3．固定端と自由端

$x = 0$ の端は固定されているが他方（$y = l$）は自由端とする．境界条件は

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \qquad (215.9)$$

であり，$y(l)$，$y'(l)$ の方は任意にとれる．したがって，(215.5) 式からさらに前提条件として次の2条件

$$y''(l) = 0,\ y'''(l) = 0 \qquad (215.10)$$

が (215.9) に追加される．

4．自由端

この場合は，境界条件 (215.10) 式が両端で満たされていなければならない：

$$y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0, \tag{215.11}$$
$$y''(l) = 0,\ y'''(l) = 0.$$

どの境界条件も変分問題を設定する段階であたえられる点に注意しておこう．この例では，われわれが追加すべき条件はなく，当然と見なされる境界条件で充足している．

この問題は，まだ別の難点を持っているように思える．なぜなら，剛体棒は両端を上向きの力で支えておかない限り釣合を保ち得ないことは自明だからである．しかし，その力も連続的に分布している力の一部分だと見なすと，$\rho(x)$ のなかに符号を含めて取り入れることができる．微分方程式の一般論によると，対応する斉次微分方程式——荷重のない場合の方程式——が，$y = 0$ という自明な解以外には持たない場合に限って (215.4) 式の右辺は任意にあたえることが許されるということが分かっている．以上に述べてきた三つの例では，あたえられた条件の下で微分方程式

$$y''''(x) = 0 \tag{215.12}$$

が解を持たないとした場合ばかりであった．この方程式は，2個の独立な解を持っている．すなわち，

$$y = l \tag{215.13}$$

なる解と

$$y = x \tag{215.14}$$

である．この場合には，$\rho(x)$ が斉次方程式の解 (215.13) と (215.14) に「直交」していない限り，すなわち，

$$\int_0^l \rho(x)dx = 0 \tag{215.15}$$

$$\int_0^l \rho(x)xdx = 0 \tag{215.16}$$

でない限り境界値問題の解は存在しない．この条件の物理的意味は，働いている力の総和と力のモーメントの総和がゼロということである．これらの条件により，両端の上向きの力が決まる．これらは，変分計算の手続きから完全に帰結される境界値問題の解の存在条件から導かれる．

《問題2》 $x = 0$ の方は支持端で，$x = l$ の方は自由端である場合を考えよ．この場合の解の存在条件は，力のモーメントがゼロになるということに尽きることを示せ．

《問題3》 断面積の異なる2本の棒が強く繋ぎ合わされているとする．この場合，(215.4) 式の k の値は継目 $x = \xi$ で不連続的に変化する．境界項 (215.5) から，ky'' と ky''' は $x = \xi$ で連続的であるという2条件が導けることを示せ．

《まとめ》 微分方程式——ないしは，連立微分方程式——の解は，必要な数だけの境界条件がなければ一意的解を持てない．定積分の停留値を求める問題の場合には，いつでも必要な数だけの境界条件が存在した．外的状況からだけでは境界条件の全部は決定されない場合でも，δI の境界項があたえられた境界条件の他に当然とされる境界条件を具備しているので，残りの境界条件も変分問題自体から導出される．両端の状態がいろいろと考えられる剛体棒の場合が，これらの原理の応用できる物理系である．

第 3 章
仮想仕事の原理

§ 1. 可逆変位にたいする仮想仕事の原理

力学における最初の変分原理は，仮想仕事の原理である．これは，力学系の平衡状態を支配する原理であり，かつ，解析力学の後の発展の基礎となるものでもある．

ニュートン力学においては，粒子に働く力の総和がゼロであるとき平衡状態にあるという．この立場では，粒子は他から切り離され，すべての拘束条件は力で置き換えられる．梃子のような簡単な系を考えてみただけでもこの形式がいかに不備なものかが明らかになる．梃子は無限大に近い数の粒子の集まりであり，それらの間には無限に多くの内力が働いている．一方，解析力学の方法では，そのような力は不用であり，ただ一つの外力――今の場合は，重力――を考えるだけですむ．この方法では，あたえられた条件に矛盾しないような仮想変位を用いる．梃子の場合ならば，支点の周りで剛体と見なして回転して見ればよい．この場合，粒子間隔は変化しない．このように考えれば，拘束条件を実現している内力などは考えなくてもよい．

剛体の力学的挙動は，砂で作った小山とは確かに異なる．剛体の場合には，粒子を結合させている強い内力が働いているが，砂山の場合にはそれほどの力は存在しない．しかし，一体どうすればそのような強い力の存在は確かめられるだろうか．剛体を壊してみればよい．すなわち，あたえられた条件と一致しない方法で粒子を他から引き離せばよい．剛体ないし砂山を回転運動と横移動させるだけで，二つの系の間の力学的視点からの違いはなくなってしまう．なぜならば，砂山にはなくて剛体には存在する強い内力は何の効果も現さないか

らである．このことが，力学の変分法的議論において「拘束力」，つまり付加条件を実現している力というものを考えなくてもよく，「外力」のなす仕事だけを考慮すればよい理由である．仮想変位は，拘束条件と矛盾しないようにとられるので系の内力の効果は考慮しなくてよい．この方法で得られる方程式の数は粒子の数に比べれば圧倒的に少ない．しかし，それでも系の自由度の数とは等しい．

まず，ベクトルを使って説明する．外力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，……，$\boldsymbol{F}_n$ が点 P_1，P_2，……，P_n に作用しているとする．各点での仮想変位を，

$$\delta\boldsymbol{R}_1,\ \delta\boldsymbol{R}_2,\ \cdots\cdots,\ \delta\boldsymbol{R}_n \qquad (31.1)$$

とする．これらの仮想変位は，拘束条件に矛盾しないようにとらなければならない．また，ここでは可逆な変位，すなわち，あたえられた条件の下で，任意の $\delta\boldsymbol{R}_i$ を $-\delta\boldsymbol{R}_i$ に変えてよいと仮定する．

仮想仕事の原理の主張するところは，働いている力のなす仮想仕事がゼロであるとき，すなわち，

$$\overline{\delta w} = \boldsymbol{F}_1\delta\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{F}_2\delta\boldsymbol{R}_2+\cdots\cdots+\boldsymbol{F}_n\delta\boldsymbol{R}_n = 0 \qquad (31.2)$$

が満たされているとき，かつ，そのときに限り平衡状態にあるということである．

この方程式を解析力学の言葉に翻訳してみよう．それにはまず直交座標 x_i，y_i，z_i を一般化座標 q_1，q_2，……，q_n の関数で表しておかなければならない（第1章 § 7）．そうすれば，(31.2) は新しい微分形式

$$\overline{\delta w} = F_1\delta q_1+F_2\delta q_2+\cdots\cdots+F_n\delta q_n \qquad (31.3)$$

に変形される．F_1，F_2，……，F_n は一般化された力の成分である．このことから，n 次元配位空間の一つのベクトルが定まる．

仮想仕事の原理は，

$$F_1\delta q_1+F_2\delta q_2+\cdots\cdots+F_n\delta q_n = 0 \qquad (31.4)$$

であることを主張する．この方程式には，幾何学的描像をあたえることができる．この方程式の右辺は，一般化された力と仮想変位の「スカラー積」（内積）である．スカラー積がゼロということは，一般化された力 F_i は仮想変位に直交していることを意味している．

はじめに，拘束のない力学系について考えてみる．この場合には，配位空間

の点Cはどの方向にも変位する．あらゆる方向に直交する有限ベクトルはないから，(*31.4*) 式が成り立つためには $F_i = 0$ でなければならない．次に，m 個の拘束条件があり，C点が配位空間の $(n-m)$ 次元の部分空間内にある場合を考える．今度は $F_i = 0$ とはならないで，力 F_i は部分空間とだけ直交していればよい．この条件から，力学系の自由度と同じ $n-m$ 個の方程式が得られる．

仮想仕事の原理の物理的意味が分かった．ニュートン力学では，釣合が保たれているためには，どの粒子に対しても働いている力の合力がゼロであることが必要であった．ここでの合力とは，外力と拘束を表す力の和である．後者の方は，通常「反作用の力」と呼ばれる．釣合の原理は，「作用している力と反作用の力の合力がゼロである」ことであり，作用している力のなす仮想仕事は反作用のなす仮想仕事の符号を変えたものに等しい．したがって，仮想仕事の原理は，

「反作用のなす仮想仕事は，拘束条件にかなった任意の仮想変位に関して常にゼロである」

と表現できる．これを，公準 A と呼ぶことにする．この公準は，静力学に限定したものでない．仮想仕事の原理をダランベールの原理によって一般化すれば，この公準は動力学にも適用できるようになる．力学における基本的変分原理 (Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton の原理) はダランベールの原理と同等であり，公準 A は解析力学の唯一の公準であり，大変重要である[1]．

最小作用の原理は，外力が単生的 (monogenic)，すなわち，1個のスカラー関数（仕事の関数）から導けることに特別重要な意義を認めている．この場合，仮想仕事は仕事の関数 $U(q_1, \cdots\cdots, q_n)$ の変分に等しい．仕事の関数は，ポテンシャル・エネルギーの符号を変えたものであったから，力学系の釣合はポテンシャル・エネルギーの停留値，すなわち条件

$$\delta V = 0 \tag{31.5}$$

によって特徴付けられる．釣合が安定な釣合状態ならば，ポテンシャル・エネ

1) 解析力学は数学的にはニュートンの法則の別の定式化に過ぎないと考えている科学者がいたとすれば，その人は公準 A もニュートンの運動方程式から導出できると思っているに違いない．著者には，そのことがどのようにして証明されるのか見当も付かない．ニュートンの第3法則（作用反作用の法則）は，公準 A より決して広いものでもない．

ルギーは最小値（局所的意味で）でなければならない．一般には，最小値でなくても，停留値であれば十分である．

《まとめ》 仮想仕事の原理は，あたえられた拘束条件の下での配位の無限小変位に関して作用している力のなす仕事がゼロになるときに平衡状態であることを主張する．この原理によれば，単生的力の場合の平衡状態はポテンシャル・エネルギーが可能なあらゆる変分に関して停留値を持つ状態であることが分かる．

以下2節では，剛体の静力学に関係して仮想仕事の原理を適用する．得られる結論はベクトルを用いた力学でよく知られたものばかりであるが，それらを一つの基本原理から導出することは意味深いに違いない．

§ 2. 剛体の釣合

自由に動きまわることのできる剛体の自由度は6であった．並進の自由度3と回転の自由度3の合計である．無限小量の重ね合わせの原理を利用すれば，これら二つの変位を別々に考えることができる．

（A） 並進

無限小の並進によって，剛体の各点は同じ量だけ変位する．無限小の変位を ε，単位長さのベクトルを $\boldsymbol{B}$ とする．粒子 P_k の無限小変位は

$$\delta\boldsymbol{R}_k = \varepsilon\boldsymbol{B} \tag{32.1}$$

と表される．仕事の総計は，

$$\overline{\delta w} = \Sigma(\boldsymbol{F}_k\cdot\varepsilon\boldsymbol{B}) = \varepsilon\boldsymbol{B}\cdot\Sigma\boldsymbol{F}_k \tag{32.2}$$

である．$\boldsymbol{B}$ の方向は任意に選べるので，$\delta w = 0$ が成り立つ条件は

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \Sigma\boldsymbol{F}_k = 0 \tag{32.3}$$

である．この式は，合力 $\boldsymbol{F}$ がゼロでなければならないことを示している．

ピストンの上下運動を考える．この場合には，ベクトル $\boldsymbol{B}$ は決まった方向しかとらないので，(32.3) 式から，合力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ の運動方向の成分がゼロであるということだけが結論される．

（B）　**回転運動**

無限小の回転角を ε と置く，Ω を回転軸方向の単位ベクトルとすると，点 P_k の変位は

$$\delta \boldsymbol{R}_k = \varepsilon\Omega\times\boldsymbol{R}_k \tag{32.4}$$

と書ける．$\boldsymbol{R}_k$ は回転軸の原点から測ったときの点 P_k の位置ベクトルである．力 $\boldsymbol{F}_k$ による仕事は，

$$\overline{\delta w_k} = \boldsymbol{F}_k\cdot\varepsilon\Omega\times\boldsymbol{R}_k = \varepsilon\Omega\cdot(\boldsymbol{R}_k\times\boldsymbol{F}_k) = \varepsilon\Omega\cdot\boldsymbol{M}_k \tag{32.5}$$

に等しい．ここで，

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{R}_k\times\boldsymbol{F}_k \tag{32.6}$$

は「力のモーメント」である．したがって，仕事の総和は

$$\overline{\delta w} = \Sigma\varepsilon\Omega\cdot\boldsymbol{M}_k = \varepsilon\Omega\Sigma\boldsymbol{M}_k \tag{32.7}$$

となる．(32.7) 式と (32.2) 式の類似性に注目しておこう．ベクトル Ω は変位ベクトル $\boldsymbol{B}$ に対応しており，モーメント $\boldsymbol{M}_k$ が力 $\boldsymbol{F}_k$ に対応する．

自由剛体はどの軸の周りでも回転できるから，Ω は任意の方向をとれることになり (32.7) 式がゼロになるためには，

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \Sigma\boldsymbol{M}_k = 0 \tag{32.8}$$

でなければならない．力のモーメントの総和はゼロである．

かくして剛体の釣合に関して第2の条件が得られた．剛体のどんな仮想変位も無限小の並進と無限小回転の重ね合わせで表せるから，条件 (32.3) と (32.8) から平衡状態は決まる．

〈注 1〉 剛体を原点に静止させておけば，並進の自由度はなくなる．この場合には最初の条件，「力の総和はゼロ」，は成り立たないが，第2の条件，「力のモーメントの総和はゼロ」，は成り立つ．位置ベクトル $\boldsymbol{R}_k$ は固定点から測られる量であり，その点の周りでの力のモーメントの総和がゼロにならなければならない．

〈注 2〉 一点だけでなく剛体の軸も固定されている場合がある．このときには，Ω は任意の方向をとり得ずあたえられた軸方向のベクトルでなければならない．(32.7) 式からは，

$$\Omega\cdot\overline{\boldsymbol{M}} = 0 \tag{32.9}$$

のみが導かれる．この式は，モーメントの回転軸方向の成分だけがゼロであることを示している．

《まとめ》 剛体の可能な運動形態は並進と回転である．並進が可能であるためには，すべての力の総和がゼロにならなければならない．回転が可能であるためには，力のモーメントの総和がゼロでなければならない．

§ 3.　二つの力系の同等性

後の節で述べるように，仮想仕事は静力学的状態だけでなく動力学的状態をも決定する．同一の仮想仕事を生み出す二つの力系は動力学的には同等である．

剛体に作用している力による仮想仕事は，二つの量（合力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ とモーメントの総和 $\overline{\boldsymbol{M}}$）に依存していることから次の定理が得られる：同じ合力と同じモーメントの総和をもつ二つの力学は同等である．

《問題 1》 剛体に働いている力を一つの合力で置き換えることができるのは，モーメントの総和 $\overline{\boldsymbol{M}}$ と合力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ が直交しているとき，すなわち

$$\overline{\boldsymbol{M}}\cdot\overline{\boldsymbol{F}} = 0 \tag{33.1}$$

が成り立つときでありかつそのときに限られることを示せ．

《問題 2》 二つの力が一つの力で置き換えられるのは，同一平面内にあるときであり，偶力でない場合に限られることを示せ．

《問題 3》 平行な力

$$\boldsymbol{F}_i = m_i\boldsymbol{G} \tag{33.2}$$

はいつでも一つの力

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{m}\boldsymbol{G} \tag{33.3}$$

が1点

$$\boldsymbol{R}_0 = \Sigma m_i\boldsymbol{R}_i/m \tag{33.4}$$

に作用していると見なすことができることを示せ．ただし，$\overline{m} = \Sigma m_i$ である．

《問題 4》 幾つかの力が働いている場合，それらは合力 $\overline{\boldsymbol{F}} = \Sigma\boldsymbol{F}_i$ と $\overline{\boldsymbol{F}}$ に平行な軸を持つ偶力の和で表されることを示せ．

§ 4. 付加条件つきの平衡問題

幾つかの付加条件のもとでの釣合を調べなければならないことがよくある．第2章 第5，12節に示しておいたように，このような場合には無限小の仮想仕事 δw に付加条件の変分を加えておかなければならない．一例として，静力学の問題を考えてみよう．

1. 結合棒の問題

断面積が一定の一様な何本かの剛体棒を考え，それらの両端は摩擦のない結合器具で鎖状に結合しているとする．両端は固定されているとする．この系の平衡状態を求めてみよう．外力としては重力だけであり，この力は単生的である．まず，系のポテンシャル・エネルギーを求めなければならない．x 軸を水平，y 軸を垂直にとって，各棒の両端の直交座標を x_k，y_k とすれば，棒の長さ l_k は，

$$l_k^2 = (x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2 = (\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2 \qquad (34.1)$$
$$(k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

であたえられる．単位長さ当たりの質量を σ とすればポテンシャル・エネルギーは

$$V = \frac{\sigma g}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(y_k+y_{k+1})l_k \qquad (34.2)$$

であたえられる．(*34.1*) 式を n 個の付加条件と見なし，ポテンシャル・エネルギーを最小にしなければならない．

ラグランジュの方法では，制約を受けたポテンシャル・エネルギーを

$$\overline{V} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(y_k+y_{k+1})l_k+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k[(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2] \qquad (34.3)$$

最小にしなければならない（ここで，本質的でない因子 σ_g を省いた）．変分変数は x_k，y_k ($k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$) であり，$x_0$，$y_0$，$x_n$，$y_n$ が固定端の座標である．x_k の変分から

$$\lambda_k\Delta x_k-\lambda_{k-1}\Delta x_{k-1} = 0 \qquad (34.4)$$

が得られる．この差分方程式から

$$\lambda_k = \frac{C}{\Delta x_k} \qquad (34.5)$$

が得られる．同様にして，y_k の変分からは

$$\frac{1}{2}(l_k+l_{k-1})-\lambda_k\Delta y_k+\lambda_{k-1}\Delta y_{k-1} = 0 \qquad (34.6)$$

が導かれる．この結果に（*34.5*）式の値を代入すれば，差分方程式

$$c\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}-\frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}}\right) = \frac{1}{2}(l_k+l_{k-1}) \qquad (34.7)$$

が得られる．これは，平衡状態を決める方程式である．

2.　**一様な鎖の問題（懸垂線）**

剛体棒の数を増すと同時にそれらの長さを縮小して行けば，上記の系は滑らかで連続かつ微分可能な曲線に近付く．この極限は，一様な棒の問題になる．（*34.7*）式は，この極限で微分方程式，

$$c\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1 \qquad (34.8)$$

になる．ds は曲線の線素である．この解曲線を $y = f(x)$ とすると，（*34.8*）式は

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha\left(=\frac{1}{c}\right) \qquad (34.9)$$

と書くことができる．解は

$$y = \frac{1}{2\alpha}(e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}) \qquad (34.10)$$

であたえられ，この曲線は懸垂曲線として知られている．

離散的棒の極限としてではなく，鎖の問題を変分法を使って解いてみよう．解曲線は，

$$x = x(\tau),\ y = y(\tau) \qquad (34.11)$$

であろうと予想しておこう．今度は，ポテンシャル・エネルギーは

$$V = \int_{\tau 1}^{\tau 2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\tau \qquad (34.12)$$

である．付加条件の取扱方は二とおりある．“例題 1” と同様に考えると変分の際に鎖の小部分の長さは一定に保たなければならない．パラメータ τ を曲線の弧の長さ s と一致するようにとっておけば，付加条件は

$$x'^2+y'^2 = 1 \qquad (34.13)$$

と書かれる．ここでラグランジュの未定係数法を用いると，制約を受けたポテンシャル・エネルギーの表式は

$$\overline{V} = \int_{\tau 1}^{\tau 2}[y+\lambda(x'^2+y'^2)]d\tau \qquad (34.14)$$

となる．

この例では，鎖は完全に滑らかであるとしたから別の変分法でも解くことができる．全長を変えない限り，曲線（*34.11*）は任意の変形を加えてよい．このことは，

付加条件

$$\int_{\tau 1}^{\tau 2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\tau = 一定 \tag{34.15}$$

の下で（34.12）を最小にすればよいことを意味する．この問題は等周問題と同じである（第2章 第14節）．この場合のポテンシャル・エネルギーは，

$$\overline{V} = \int_{\tau 1}^{\tau 2}(y+\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\tau \tag{34.16}$$

であたえられる．

これら二つの方法の本質的違いは，第一の場合——付加条件は局所的——にはラグランジュの未定係数 λ は τ の関数であるが，第二の場合——付加条件は積分の形で大域的にあたえられている——には未定係数は τ によらない定数であるということである．

《問題 5》 積分（34.14）から，オイラー・ラグランジュの微分方程式を導け．変数 x に関する第一の方程式を解くことは簡単である．λ の値を求め第二の方程式に代入すれば（34.8）式が得られることを示せ．未定係数 λ は，τ の関数であることを確かめよ．

《問題 6》 積分（34.16）からオイラー・ラグランジュの微分方程式を求めよ．また，パラメータ τ を y と同定すれば，変数 x に関する微分方程式を解くことができる．このようにして得られた結果は一般的方法で得られたものと同じであることを示せ．第二の方法での λ は常数であり，最初の問題の場合の λ と全く異なる．

§ 5. ラグランジュの未定係数法の物理的解釈

一般化座標 q_1，……，q_n で記述される力学系を考える．拘束条件は

$$f(q_1, \cdots\cdots, q_n) = 0 \tag{35.1}$$

とする．ラグランジュの方法から

$$\delta V+\lambda\delta f = 0 \tag{35.2}$$

が要求される．この方程式は

$$\delta\overline{V} = 0 \tag{35.3}$$

と書くこともできる．ただし，

$$\overline{V} = V+\lambda f \tag{35.4}$$

とした．

このようにすれば，ポテンシャル・エネルギーが V ではなくて新しいポテンシャル・エネルギー $\overline{V}$ に対する停留値を求める問題に還元される．このことは物理的見方からすれば大変自然なことである．力学系の配位空間における変分を条件 (35.1) によって制限する代わりに一般化座標 q_i に関する任意の変分であるとすれば，作用している力のみならず拘束力も現れる．ところが，後者のほうもポテンシャル・エネルギーから生み出される力であるから，これは作用している力のポテンシャル・エネルギーに加えておかなければならない．したがって，ポテンシャル・エネルギー V に λf を加えることは単に数学的必要性によるのみでなく物理的意味を持っているのである．ラグランジュの未定係数法でのポテンシャル・エネルギーの変更は，拘束条件に付随するポテンシャル・エネルギーを考慮することを意味している．

問題の性格上，われわれは拘束条件をあたえられたものとする．それらを実現している具体的機構についての情報はほとんど持ち合わせていない．エネルギー λf は未定係数 λ を含んでおり，この係数は実現された系の配位に関してだけ計算によって求められるのである．すなわち，λ は配位空間の超平面 (35.1) 上の点Cにおける値だけが分かっているだけである．拘束条件を実現している力のポテンシャル・エネルギーについては，これだけの情報で十分である．その理由は次のとおりである：追加するポテンシャル・エネルギー

$$V_1 = \lambda f \tag{35.5}$$

の勾配を求めると

$$F_{1i} = -\frac{\partial V_1}{\partial x_i} = -\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}f \tag{35.6}$$

となる．点Cでは，仮定により $f = 0$ であるので第2項は消せる．その結果，反作用の力は，

$$F_{1i} = -\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{35.7}$$

であたえられることが分かる．

ラグランジュの未定係数法は，拘束条件に関係する反作用力を導く手順を示してくれるのである．このことは，平衡状態に限ってのことではなく，後に見るように任意の運動状態に対しても成り立っている（**第5章 §8**参照）．

《問題 1》 多粒子系の仕事の関数は粒子間の相対座標

$$\xi_{ik} = x_i - x_k,\ \eta_{ik} = y_i - y_k,\ \zeta_{ik} = z_i - z_k \tag{35.8}$$

にのみ依存するとする：

$$U = U(\xi_{ik},\ \eta_{ik},\ \zeta_{ik}) \tag{35.9}$$

座標 x_i を δx_i だけ変化させれば，粒子に働く力の x 成分が得られる．i 番目の粒子の k 番目の粒子からの力の x 成分は，

$$X_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \xi_{ik}} \tag{35.10}$$

であたえられることを示せ．この結果からただちに

$$X_{ik} = -X_{ki} \tag{35.11}$$

が得られる．これは，ニュートンの作用反作用の法則に他ならない．粒子対に働く力は大きさは等しいが向きは逆であり，その和はゼロである．

《問題 2》 前問にさらに U は

$$r_{ik}^2 = \xi_{ik}^2 + \eta_{ik}^2 + \zeta_{ik}^2 \tag{35.12}$$

すなわち，相対距離にのみ依存していると仮定する．このときの粒子間の力は中心力，すなわち粒子間を結ぶ線上にある力であることを示せ．

《問題 3》 剛体を粒子系と考えると，拘束条件は

$$\xi_{ik}^2 + \eta_{ik}^2 + \zeta_{ik}^2 = c_{ik}^2 \tag{35.13}$$

であたえられる．ラグランジュの未定係数法と前二問の解答を利用して，物理系の剛性を保っている力は合力 $\overline{F}$ とモーメントの総和 $\overline{M}$ にはいかなる寄与もしていないことを示せ．

拘束条件が非ホロノームならば，変分関数はそれ以上には変形することはできない．しかし，釣合の条件には未定係数 λ を含む項が現れる．このこともまた物理的意味を持っている．この λ 項によって，作用している力は拘束力で補正される．この結果，力に対する仕事の関数は定義することはできなくなるが，反作用力はこの場合でも定義できる．

ラグランジュの未定係数法は，ホロノーム系でも非ホロノーム系でも拘束条件の性質を明らかにしホロノーム条件と単生的力とは力学的には同等であることを示してくれる．非ホロノーム条件と単生的でない力とは同等である．ホロノームな拘束条件は単生的力で実現され，非ホロノームな拘束条件は単生的でない力によって実現される．

《ま　と　め》 ラグランジュの未定係数法は，拘束条件からくる反作用力の存在という物理的意味を含んでいる．ホロノーム条件の場合には，力は仕事の関数から導くことができるが，非ホロノーム条件の場合には，仕事の関数は存在しない．反作用の力は，いずれの場合にも現れる．

§ 6.　フーリエの不等式

前節までの結論は，仮想仕事を可逆的であると仮定したときに得られたものであった．配位空間の内部に限っておけばどちら向きの運動も可能なので，この仮定は許されるが，配位空間の境界領域において考察を進める場合にはもはや許されない．この場合には，仮想変位は内向きだけであり外向きのものはとれない．例として，糸で吊り下げられた球を考えてみよう．この球は，上向きに変位することは許される．このとき糸は少しだけたわむであろう．しかし，下向きの変位は許されない．他の例を考えてみる．卓上の球は，上向きならばどの方向にでも変位することができるけれども，下向きの変位は許されない．この例では，水平方向の仮想変位だけは可逆であるが，他の変位は可逆でない．

Fourier は仮想仕事の原理，

$$\delta V = 0 \tag{36.1}$$

は，可逆な仮想変位の場合にだけ成り立つことを示した．不可逆な変位の場合には，(36.1) 式は，

$$\delta V \geqq 0 \tag{36.2}$$

と変形される．この原理は，小さいが有限の大きさの変位に際しては，V は常に増加することを意味する：

$$\Delta V > 0 \tag{36.3}$$

無限小変位に対しては，

$$\Delta V \geqq 0 \tag{36.4}$$

であることを意味する．不等号を用いたとしても何の支障もない．可逆な変位の場合に不等号が現れなかったのは次の事情による．ある方向の変位に対して

「より大」の条件が得られたならば，それと反対方向の変位に対しては「より小」という条件が導けるはずである．しかし，明らかに第2の条件は最小値であるという要請に反する．可逆でない変位の場合にはこのようなことは起こらず，ポテンシャル・エネルギーは増加する一方であり，(36.4) 式が成り立つ．ポテンシャル・エネルギーの変化は，仕事の関数の変化の符号を変えたものであるから，(36.4) 式は，

$$\overline{\delta w} \leqq 0 \tag{36.5}$$

と書くこともできる．このように表現するとき，フーリエの不等式はポテンシャルをもたない力（単生的でない力）の場合にも成り立つ．任意の仮想変位に対する仕事がゼロまたは負であれば系は釣合の状態にある．

糸で吊り下げた球を上向きに変位するとき，重力のする仕事は負である．水平方向の変位に対しては，この仕事はゼロである．卓上の球の場合ならば，水平方向の変位に伴い重力のする仕事はゼロであり，上向きの変位ではこの仕事は負である．配位空間の内部では釣合の状態をとることのできないような力学系でも境界領域において釣合の状態を実現することができる．境界で (36.5) 式を満たすようにすることの方が，配位空間内部で (36.1) 式を満たすことより簡単である．配位空間の境界領域で釣合の状態を実現するには，ポテンシャル・エネルギーが停留値をとるという条件をいつも満たしているとは限らない点に注意しておこう．

《まとめ》「仮想仕事の総和がゼロ」の形式での定式化は，可逆な変位に対してだけ成り立つ．配位空間の境界に現れる不可逆の変位に対しては，「$=0$」という表現を「$\leqq 0$」で置き換えなければならない．

第 4 章
ダランベールの原理

はじめに

ダランベールの原理を用いると，われわれは静力学の議論から動力学の議論に進むことができる．考察する問題はより複雑になるので少し工夫した手法を用いなくてはならない．有限自由度系の静力学の問題では，消去法や代入法で解くことのできる代数的方程式を扱えばよかったが，動力学の問題では微分方程式を解かなければならない．この章では，運動方程式を解くことではなく，運動方程式の導出とその解釈について説明する．ダランベールの原理は，運動方程式の解法に直接役立つものではない．しかしこの原理は，変分法の展開で重要な役割を持っている慣性力に関して新たな解釈をあたえており，解析力学の歴史的に重要な原理の一つである．

§ 1. 慣性力

フランスの数学者，ダランベール（哲学者でもあった）は，静力学での仮想仕事の原理を動力学の問題にも適用できるようにした．簡単であるがしかし深遠な意味を持つ D'Alembert のアイデアは次のようなものである．まず，ニュートンの運動法則――質量×加速度は力に等しい――

$$m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \tag{41.1}$$

から考察をはじめる．この方程式を次のように書いてみよう：

$$m\boldsymbol{A}-\boldsymbol{F} = 0 \tag{41.2}$$

ベクトル $\boldsymbol{I}$ を方程式

$$\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{A} \tag{41.3}$$

によって定義する．このベクトル $\boldsymbol{I}$ は，運動の結果として現れる力であると考えることができる．これを「慣性力」と呼ぶ．これを用いてニュートンの運動法則を，

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{I} = 0 \tag{41.4}$$

と書くことができる．(*41.3*) 式は，質量×加速度に負の符号を付け新しい名前をあたえただけで何も新しいことは出てこないように思われるかも知れない．このように自明なことが，ダランベールの原理の優れた創意であると評価されると同時に歪曲と誤解とを招いた点でもある．

(*41.4*) 式の重要な意味は，ニュートン方程式の単なる書き換えに留まらないという点にある．この式は一つの原理を表現しているのである．ニュートン力学では，力が働いていない系は釣合の状態を意味することはすでに述べたとおりである．したがって，(*41.4*) 式は，外力に慣性力を加えればいつでも釣合の状態が実現することを示している．この式は力学系に関する釣合の条件式が分かっていれば，それはただちに動力学の条件に拡張できることを示している．新しく「慣性力」を付け加えるだけで動力学を静力学の問題のごとくに扱うことができるのである．しかし，動力学の問題を静力学の方法で解けることまでは意味していない．解かなければならない方程式は，こんどは微分方程式である．われわれは，静力学的考察によってこれらの微分方程式を演繹的に推論することができるのみである．力 $\boldsymbol{F}$ に慣性力 $\boldsymbol{I}$ を加えることで，運動の問題は静力学の問題に変わるのである．

質点 m は現実に運動しているのになぜ釣合の状態として扱うのかという立場からの反論もあろう．これに対する解答は二つある．第一に，運動という現象自体が相対的なものであるということ．われわれはいつでも運動物体に乗った座標系を選んで，その座標系で運動を観察することができる．このとき，質点は静止しているかのように見えよう．第二に，ダランベールの原理は運動物体自体にではなく力の方を分析の対象にしている．何個かの力の働いている物理系の釣合の状態は運動状態にまで立ち入ることなしに調べられた．力の釣合条件は，すべての力による仮想仕事の総和がゼロになることである．この条件は実際に起こる変位に関するものではなく仮想的変位に関するものであり静止

している質点系に対しても運動している質点系に対しても同様に適用できる．仮想変位という概念は，可能ではあるが単に数学的意味での変位のことであり，無限大の速度で短い時間内に起きる変位をも含む．この瞬間には，現実の運動というものは考えていない．

D'Alembert は，1質点に関する原理を任意の力学系の原理に一般化した：幾つもの力が作用している力学系は，慣性力を付け加えると釣合の状態にあると見なせる．これは，慣性力を考慮して力に補正項を追加すると可逆な変位に対して全仮想仕事はゼロとなることを意味している．慣性力の加わった作用力に新しい名称をあたえておこう．この一まとまりの力を「有効な力」[1] と呼ぶことにし

$$\boldsymbol{F}^e_k = \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{I}_k \tag{41.5}$$

と書くことにする．この記号を用いると，ダランベールの原理は次のように定式化できる：拘束条件の下での可逆な変位に対して有効な力に伴う仮想仕事の総和はゼロである．すなわち，

$$\Sigma \boldsymbol{F}^e_k \cdot \delta \boldsymbol{R}_k = \Sigma(\boldsymbol{F}_k - m_k \boldsymbol{A}_k) \cdot \delta \boldsymbol{R}_k = 0 \tag{41.6}$$

力 $\boldsymbol{F}_k$ は限られた数の粒子に対してだけ作用している場合もあるが，有効な力の方は加速運動しているならどの粒子にも現れることに注意しておこう．幾つもの力が作用している力学系は，一般には平衡状態にない．平衡であるためには，特別の条件が満たされていなければならない．作用している力に伴う仮想仕事も一般にはゼロでないであろう．その場合には，力学系が運動して不足分を埋め合わせることになる．系は，運動の結果現れる慣性力がちょうど釣り合ってゼロになるように運動する．このように，ダランベールの原理は任意の力学系の運動方程式をあたえてくれる．仕事の関数の微分であたえられる（単生的）力と異なり，慣性力の方は非単生的（polygenic）な力である．作用している力の仮想仕事は仕事の関数の完全微分

$$\overline{\delta w} = \delta U \tag{41.7}$$

であたえられるが，慣性力の仮想仕事の方は微分形式

$$\overline{\delta w^i} = -\Sigma m_k \boldsymbol{A}_k \cdot \delta \boldsymbol{R}_k \tag{41.8}$$

1) Synge と Griffith（The Principle of Mechanics（参考文献参照））や他の著者達は有効な力という名称を質量×加速度に対してあたえている．

であたえられており，スカラー関数の微分として表現できない．後に，時間積分を用いるとき，どのようにしてこの弱点が克服されるかを示す．ニュートン方程式 (41.1) は質量 m が定数であるときだけ正しい．もし，m が運動とともに変動するならば，この方程式は，

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} \tag{41.9}$$

すなわち，「運動量の時間変化の割合が作用している力に等しい」という形式に書かなければならない．慣性力も

$$\boldsymbol{I} = -\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \tag{41.10}$$

と定義しなければならない．m が定数ならば，この定義は (41.3) に一致する．慣性力を知るためには，加速度が意味をもつ「絶対静止座標系」を導入しなければならない．このことは，Newton の時代からニュートン力学の難点の一つとされてきた．この点は，アインシュタインの一般相対論によって解決された．

ダランベールの原理の物理的意味について考えてみよう．(41.5) 式による「有効な力」の定義から，この力は自由粒子に対してはゼロである．一方，拘束条件をもつ粒子に対してはこの力は反作用の力の符号を変えたものに等しい．したがって，有効な力 $\boldsymbol{F}^e$ に仮想仕事の原理を適用することは，「拘束条件に合致する仮想変位に伴う反作用力の仮想仕事はゼロである」とすることと同等である．それゆえ，ここで再び「仮説A」(第3章 § 1）に戻ったことになる．ダランベールの原理は，この仮説を動力学の理論にまで修正を加えることなく一般化したものである．

《ま と め》 ダランベールの原理は，慣性力（質量×加速度の符号を変えたもの）という新しい概念を提起する．この力を作用している力に加えるだけで平衡状態が実現し仮想仕事の原理が適用できるようになる．この結果，仮想仕事の原理は，静力学の理論から動力学の理論へと拡張される．

§ 2. ダランベールの原理の力学における位置

ダランベールの原理は，力学問題の完全な解をあたえる．力学の他の原理はどれもダランベールの原理を別の形式で表現したものにすぎない．最も進んだハミルトンの原理もダランベールの原理から数学的変換の手続きによって得られる．二つの原理が適用できる場合には，ハミルトンの原理はダランベールの原理と同等である．ハミルトンの原理は，ホロノーム系にのみ適用できるが，ダランベールの原理の方は非ホロノーム系に対しても適用できる．

ダランベールの原理は，時間積分が入ってこない点で，その後提案されたどの変分原理よりも基本的性格を持っている．この原理の不都合な面は，慣性力の仮想仕事が単生的でない（基本的なスカラー関数にまとめられない）という点にある．このために，曲線座標系を利用する問題では，この原理は不適当である．しかし，直交座標系を用いる方法やベクトル的方法で解ける動力学の問題では，ダランベールの原理は非常に有力な方法となっている．

ある種の問題では，ダランベールの原理は最小仕事の原理よりも適用範囲が広い．加速運動している場合には，運動方程式は2階微分方程式となる．加速度は，位置座標 q_i の2階微分 $\ddot{q}_i$ ないしは速度の1階微分である．ときには──剛体の運動において見られることであるが──位置座標の時間微分と見なせないような速度を用いた方が便利なことがある．そうした変数は，「運動学的変数」と呼ばれる．対称軸の周りで回転しているコマの角運動量がその例である．このときの，角運動量は回転の角速度 $\omega = \overline{d\phi}/dt$ であるが，ここで $\overline{d\phi}$ は無限小の回転角ではあるが角変数 ϕ の微分量ではない．角変数は回転軸が固定されている場合にだけ存在し，回転軸が時間変化している場合には存在しない．それでも，コマの運動を特徴付ける量として角運動量を用いることは便利である．運動学的変数が必要な系に最小作用の原理を適用することはできないが，ダランベールの原理なら適用できる．

他の面からもダランベールの原理が基本的であることが分かる．すなわち，運動物体とともに運動している座標系を用いることができるし，ニュートン力学の範囲内ではあるが動いている座標系に現れる「見かけの力」の性質を明らかにする．この意味で，この原理は Einstein の相対運動に関する考え方の先駆

となるものである．

> 《まとめ》 ダランベールの原理において，慣性力の仕事を定式化するためには単生的ではない量を使わなければならない．したがって，最小作用の原理におけるように曲線座標を用いて解析するときのような便利さはない．しかし，運動学的な変数（非ホロノームな速度）を用いなければならない場合や動いている座標系に移って考えた方が便利な場合には，ダランベールの原理はきわめて有用である．

以下の節で特に動いている座標系を用いる場合に，ダランベールの原理を利用する典型的例を示す．最初の応用例は，エネルギー保存則の演繹することに関係している．この例は，エネルギー保存則の成立条件を明確にする点で大変興味深い．

§ 3. ダランベールの原理から見たエネルギー保存則

ダランベールの原理は，一般的には非単生的であるが，単生的かつ積分可能となる例がある．この特別な場合には，エネルギー保存則が導かれる．

(*41.6*) 式で定式化されたダランベールの原理について考えてみよう．まず，外力はポテンシャルから決められる単生的力であるとする．この力による仕事は，ポテンシャル・エネルギーの負の変化に等しい．したがって，ダランベールの原理は，

$$\delta V+\Sigma m_k \boldsymbol{A}_k\cdot\delta \boldsymbol{R}_k = 0 \tag{43.1}$$

と書かれる．第2項は慣性力による負の仕事であり，一般にはなんらかの物理量の変分として表すことはできない．いま，位置ベクトルの変分 $\delta\boldsymbol{R}_k$ は任意ではあるが特別の形のものであるとしよう．すなわち，仮想変位は dt 時間内に実際に起こった運動の結果による変位であるとする．このことは，$\delta\boldsymbol{R}_k$ を $d\boldsymbol{R}_k$ で置き換えた上で変分原理を考えることを意味している．

この特別の変分に対しては，ポテンシャル・エネルギーの仮想的変化は dt 時間内に実現した変化 dV に等しい．そのうえ，加速度 $\boldsymbol{A}_k$ を位置ベクトル $\boldsymbol{R}_k$ の2階微分で置き換えてみると，第2項も完全微分になっていることが分

かる．すなわち，

$$\Sigma m_k\ddot{\boldsymbol{R}}_k d\boldsymbol{R}_k = \Sigma m_k\ddot{\boldsymbol{R}}_k\dot{\boldsymbol{R}}_k dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Sigma m_k\dot{\boldsymbol{R}}_k^2\right)dt = dT \qquad (43.2)$$

が得られる．ただし，

$$\frac{1}{2}\Sigma m_k\dot{\boldsymbol{R}}_k^2 = \frac{1}{2}\Sigma m_k v_k^2 = \mathrm{T} \qquad (43.3)$$

と置いた．

(43.1) 式は

$$dV+dT = d(V+T) = 0 \qquad (43.4)$$

と書けるから，この結果から

$$T+V = E = 一定 \qquad (43.5)$$

が得られる．運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和は一定に保たれる．この定理は，「エネルギー保存則」と呼ばれる．(43.5) 式はスカラー方程式であり，運動方程式の積分の一つにすぎない．このことだけでは，運動の問題の解としてはなはだ不十分である．1 自由度の系を除けば，エネルギー保存則は自然界に見られる最も基本的で共通の法則の一つであり，適当な読み換えさえ行えば力学系ばかりでなく，すべての物理系に対してこの法則は成り立っている．

自然に起こるであろう変位は運動学的に見て可能な変位の一つであるから，$\delta\boldsymbol{R}_k$ をいつでも $d\boldsymbol{R}_k$ で置き換えてよいように見える．しかし，確かに自明であるこの理由もいつでも有効というわけではない．自由粒子系ならばこのことは成り立っているが，拘束力学系では常に成り立つとはいえない．配位空間のC点の位置を任意に変位させることは確かに可能であり，δq_k と dq_k を一致させることはできる．このことは，粒子系の変位 $\delta\boldsymbol{R}_k$ が自然に起こるであろう変位 $d\boldsymbol{R}_k$ に常に一致していることを意味しない．変分は任意の時刻で瞬時にとられる量であり，変化の速度は無限大であるが，自然に起こる変位は有限速度を持つことを考慮する必要がある．(12.8) 式と (18.3) 式を比較してみると，第1の場合には $\delta q_k = dq_k$ であることから$\delta\boldsymbol{R}_k = d\boldsymbol{R}_k$ と結論されるが，第2の場合にはこのことが成り立たないことが分かる．第1のタイプの方程式は，拘束条件が時間を陽に含まないときにだけ成り立ち，第2のタイプの方程式は拘束

条件が時間に陽に依存している場合に成り立っている．$V = -U$ と定義したので，以上の結果は仕事の関数が時間を陽に含まないことがエネルギー保存則の条件であることを示している．

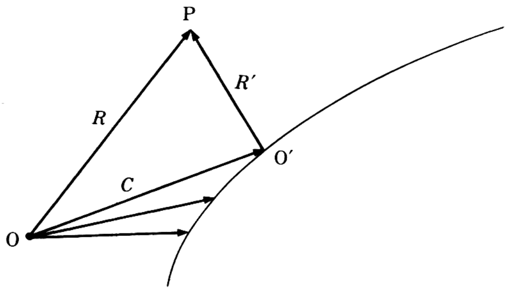
以上から，エネルギー保存則が成り立つ場合は，拘束条件も仕事の関数もどちらも時間を陽に含んでいない場合に限られることが分かる．質量 m_k も定数であることを暗に仮定している．

《ま と め》 ダランベールの原理で変位を dt 時間内に起こる自然な運動の結果としての変位に等しいとすれば，エネルギー保存則が導ける．運動エネルギーとポテンシャン・エネルギーの和は一定に保たれる．この証明が可能であるためには，粒子の質量は定数であり粒子系の仕事の関数も拘束条件もともに時間に依存しない場合である．

§ 4. 加速系における見かけの力

ダランベールの原理の正しさは，精密な物理実験によって検証される．この原理から導かれることと実験の結果とはよく一致している．ダランベールの原理では，慣性力も力学系に働く力の一つであるとした．一方，慣性力を定義するためには「絶対座標系」を導入しなければならない．加速度を測ろうとする座標系が絶対座標系から見て相対的に動いているならば，その座標系から見た慣性力は真のものではありえず補正項を含むであろう．ダランベールの原理では座標系が動いていることの反映として慣性力として加わる補正も，外場によって決まる力と同類であると解釈する．座標系が動いていることに伴う見かけの力は，このように解釈されるのである．

さらに議論を進めるには，「絶対静止」にある座標系と動いている座標系とを比較しなければならない．これらを，座標系 S，座標系 S' とし，次の記号を用いることにしよう．絶対静止系での物理量に「プライム」を付けたものが，運動座標系での対応する物理量であるとする．ここでは特に，それぞれの座標から見た粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$，速度 $\boldsymbol{v}$，加速度 $\boldsymbol{A}$ の三つの物理量について考えてみよう．



第4図

まず，任意の加速度で上下運動するエレベータのように並進運動だけができる参照系について考察する．参照系の並進運動は，次のように特徴づけられる．座標系 S' の原点 O' は，曲線 C に沿って動くとし，座標系 S の原点 O から測ってベクトル $\boldsymbol{C}$ であるとする．C は時間の関数である．座標系 S' からみた位置ベクトル $\boldsymbol{R}'$ は，座標系 S からみた位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ と次の関係にある：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}+\boldsymbol{R}' \tag{44.1}$$

両辺の時間に関する2階微分をとれば，

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{C}}+\ddot{\boldsymbol{R}}' \tag{44.2}$$

が得られる．これは，

$$\boldsymbol{A} = \ddot{\boldsymbol{C}}+\boldsymbol{A}' \tag{44.3}$$

または，

$$\boldsymbol{I} = -m\ddot{\boldsymbol{C}}+\boldsymbol{I}' \tag{44.4}$$

と書くこともできる．ダランベールの原理によると，外力 $\boldsymbol{F}$ に二つの部分からなる慣性力を加えることになる．物理量 $-m\ddot{\boldsymbol{C}}$ は真の慣性力の一部分であり，観測している座標系が絶対静止座標系に対して相対的に運動していることの結果である．参照系の運動が相対的慣性力 $\boldsymbol{I}'$ の外に力を生み出すならば，その力は「見かけの力」と呼ばれる．この種の力は絶対静止系には現れず参照系が絶対静止系に相対的に運動している結果現れたものであり，この呼び方が妥当である．しかし，この種の力は他の物理的力と違ってなんら実在性のないものと考えるのは誤りである．運動している座標系では見かけの力もその本性から他の力と区別できない実在的力なのである．いま仮に，観測者は自分の用いて

いる座標系が加速度運動していることに全く気付かないとしよう．すると，いかなる純力学的観測によっても参照座標系が加速度運動していることを確かめることができない．ダランベールの原理によると，物理的効果は外力 $\boldsymbol{F}$ と慣性力 $\boldsymbol{I}$ の和によって決まる．しかし，この二つの力をなんらかの基本的原理によって分離することはできないのである．もし，用いている座標系の固有運動について何も知ることのできない観測者が，見かけの力 $-m\ddot{\boldsymbol{C}}$ を外力と解釈したとしてもどこにも矛盾は現れない．

このことがダランベールの原理からの論理的帰結である．真の慣性力 $\boldsymbol{I}$ と動いている座標系から見た慣性力 $\boldsymbol{I}'$ の間に，

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{J}+\boldsymbol{I}' \tag{44.5}$$

なる関係があるとしよう．動いている座標系に現れる有効力は

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{J}+\boldsymbol{I}' \tag{44.6}$$

に等しい．力学的効果を決めるのはこの有効力だけであるので，$\boldsymbol{F}^e$ は $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{I}'$ の和と見なそうが $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{I}'$ の和と見ようがなんら差し支えない．第1の見方では，参照系は運動しており慣性力 $\boldsymbol{J}$ を生じたと解釈する．第2の見方では，参照系が運動していることには触れないで力 $\boldsymbol{J}$ を作用している力の一部と解釈する．

特別の場合として定加速度 $\boldsymbol{G}$ で上昇する窓のないエレベータにわれわれは閉じ込められているとして，突然，重力場が消滅してしまったとしてみよう（アインシュタインの箱の実験）．ダランベールの原理は，これら二つを区別するどのような物理的実験も存在しないことを教えてくれる．

その理由は，次の二つの仮説からの帰結を区別することができないからである：

（1） 重力場は存在せず，座標系は定加速度 $\boldsymbol{G}$ で上昇している．

（2） 座標系は静止しており，質点 m に重力 $\boldsymbol{G}$ が下向きに働いている．

この「等価性の仮説」は，一般相対論を確立する前に重力問題を解決する目的でアインシュタインによって提案されたものである．この同等性は，純力学現象でのダランベールの原理からの帰結でもある．アインシュタインは，ダランベールの原理をより一般的な原理へと発展させたのであった．ダランベールの原理によると加速系に現れる見かけの力は

$$\boldsymbol{E} = -m\ddot{\boldsymbol{C}} \tag{44.7}$$

であるが，これは「アインシュタインの力」と呼ぶべき量である．慣性力 $-m\boldsymbol{A}$ から生まれる見かけの力はどれも慣性質量に比例することに注意しておこう．慣性質量は常に重力質量に比例するという経験的事実は，アインシュタインをして重力を見かけの力と見なさせた決定的な要因であった．

ダランベールの原理で解釈される例

（a） 飛行機から落下傘で降りる飛行士は，最初の数秒間には無重力状態を体験する．落下に伴う見かけの力が現れた結果重力場による力が打ち消されたのである．落下傘が開いた瞬間から飛行士は重力の存在を感じるようになる．

（b） 同じ感覚は，それほど強いものではないけれどもエレベータで降りる場合にも体験するものである．エレベータが減速して停止する直前にはわれわれの見かけの重さはあたかも増加したかのように感じられる．

（c） 乗物が始動する瞬間には，われわれは後ろに押しやられるし，停止の直前には逆に前方にほおり出される．

（d） 汽車の加速と減速は，床に垂直に取り付けられた高感度の釣合バネを用いるならば検知できる．

《ま と め》 参照座標系が加速運動をしているなら，運動の結果として外力の外に別の力があたかも存在するかのような効果が現れる．この種の力は運動している座標系から見たときにだけ現れ絶対静止座標系においては見られないので，ダランベールの力とか見かけの力と呼ばれる．もし座標系が定加速度運動をしているなら，そこに現れる見かけの力は一様重力場による力である．

§ 5. 回転系における見かけの力

剛体のどのような運動も並進と回転の運動を合成したものである．並進運動については分かったとして，ここでは回転運動について考察する．

座標系の原点 O が固定されていると，絶対静止系 S での位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ と回転座標系 S' での位置ベクトル $\boldsymbol{R}'$ は同じである；

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}' \tag{45.1}$$

しかし，各座標系で観測される時間変化は異なり，おのおのの系で観測される速度も加速度も異なっている．座標系 S' の定ベクトル $\boldsymbol{B}$ はこの座標系とともに回転しているので，これを座標系 S から見ると dt 時間内に

$$d\boldsymbol{B} = (\Omega\times\boldsymbol{B})\cdot dt \tag{45.2}$$

だけ無限小変位する（(32.4) 式を見よ）．ただし，Ω は，S 系から見たときの S' 系の回転の角速度ベクトルである．したがって，

$$d\boldsymbol{B}/dt = \Omega\times\boldsymbol{B} \tag{45.3}$$

あるいは

$$d'\boldsymbol{B}/dt = 0 \tag{45.4}$$

である．ここで，d'/dt は運動している座標系 S' の上で見たときの物理量の時間変化の割合を表す演算子である．今度はもしベクトル $\boldsymbol{B}$ は座標系 S' で定ベクトルでないなら，すなわち，$d'\boldsymbol{B}/dt \neq 0$ であるなら，無限小量に関する重ね合わせの原理から

$$d\boldsymbol{B}/dt = d'\boldsymbol{B}/dt+\Omega\times\boldsymbol{B} \tag{45.5}$$

であることが分かる．この公式を位置ベクトルに適用すると

$$d\boldsymbol{R}/dt = d'\boldsymbol{R}'/dt+\Omega\times\boldsymbol{R}' \tag{45.6}$$

が得られる．この式からは，速度に関する公式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'+\Omega\times\boldsymbol{R}' \tag{45.7}$$

が得られる．

絶対加速度 $\boldsymbol{A}$ と相対加速度 $\boldsymbol{A}'$ の関係は，(45.7) 式を時間で微分して求められる：

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}+\dot{\Omega}\times\boldsymbol{R}'+\Omega\times\frac{d\boldsymbol{R}'}{dt} \tag{45.8}$$

右辺では，座標系 S' から見た量だけにするには (45.5) 式を用いればよい．その結果は，

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{v}'}{dt}+2\Omega\times\boldsymbol{v}'+\Omega\times(\Omega\times\boldsymbol{R}')+\dot{\Omega}\times\boldsymbol{R}' \tag{45.9}$$

である．これに $-m$ を掛ければ慣性力に関する公式

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'-2m\Omega\times\boldsymbol{v}'-m\Omega\times(\Omega\times\boldsymbol{R}')-m\dot{\Omega}\times\boldsymbol{R}' \tag{45.10}$$

が得られる．

以下では，絶対静止座標系と運動している座標系とを比較することはやめよう．回転座標系 S' だけを用いても差し支えない．すべての物理量は，S' 系から見たものと解釈し，以後プライム記号は外すことにしよう．座標系の運動は，3種類の見かけの力を生み出すことに注意しておこう．

(45.10) 式の右辺の第3項を

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{m}\omega^2\boldsymbol{R}_\perp \tag{45.11}$$

と書こう．ただし，$\boldsymbol{R}_\perp$ はベクトル Ω に直交するベクトル $\boldsymbol{R}$ の成分である．この力は単生的であり，ポテンシャル・エネルギー

$$\phi = -\frac{m}{2}\omega^2{\boldsymbol{r}_\perp}^2 \tag{45.12}$$

から求めることができる．これは，遠心力である．固定軸の周りで回転している地球上では，測地線は重力と遠心力の合力の方向に一致する．ダランベールの原理は，この二つの力はどのようにしても分離できないことを示す．また，速度に関係している第2項

$$\boldsymbol{B} = -2m\Omega\times\boldsymbol{v} = 2m\boldsymbol{v}\times\Omega \tag{45.13}$$

は別の性質を持つ．この力は，常に速度に直交しており，仕事に寄与しない．こちらは，コリオリーの力と呼ばれる．この力の水平成分の存在は，フーコーの振子の実験（地球が自転していることを検証した最初の実験）で確かめられる．垂直成分の存在は，エトベー（ハンガリー）の化学天秤の実験で検証できる．

この実験の装置は，垂直軸の周りを定角速度で回転するように工夫されている．秤竿は平面内で回転しており竿の右側にある粒子と左側にある粒子とはちょうど対称な位置にあって同じ速さで運動しているが速度ベクトルの向きは逆になっている．そのためコリオリーの力は上下逆向きに働くことになり，秤の竿にはトルクが周期的に働くことになり，秤全体が強制振動することになる（トルクが最大になるのは秤竿が子午線に一致するときであり，東西方向に向いたときにはゼロになる）．この効果は非常に弱いものではあるが共鳴法を駆使して捉えることができる．

(45.10) 式の最後の項は，角速度ベクトルが向きないしは大きさを変えると

きにだけ現れる．固定軸の周りでの一様回転の場合にはゼロである．第3の見かけの力の名称は決まっていない．この力は，Euler が最初に研究したものであるのでオイラーの力と呼んではどうだろうか．

$$\boldsymbol{K} = -\mathrm{m}\dot{\Omega}\times\boldsymbol{R} \tag{45.14}$$

と定義すれば，有効力 $\boldsymbol{F}^e$ は，

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I} \tag{45.15}$$

で表される．

> 《まとめ》 回転座標系にいる観測者は，見かけの力として中心力とコリオリーの力を見出す．回転が一様でないときには，これに加えて第3の力，オイラーの力が現れる．

§ 6. 剛体の運動：重心の運動

見かけの力の働きとダランベールの原理に関係した最後の例題として剛体の自由運動を考えてみる．剛体の上に座標系をとってこの運動を記述することにしよう．この座標系では剛体は静止しているように見え，したがって，釣合の状態にある．

第3章第2節に示しておいたように，剛体が平衡状態にあるための条件は二つある．すべての力の総和がゼロであることとモーメントの総和がゼロであることの二つであった．この節では，第1の条件を用いる．

合力 $\boldsymbol{F}^e$ を求めるには，剛体に作用している力の他に，この座標系から見たときの見かけの力が存在することも考慮しなければならない．まず第1に，並進運動に関係してアインシュタインの力 (44.7) が存在する．そのうえ，遠心力 (45.11) とオイラーの力 (54.14) が剛体の回転運動の結果として現れる（用いている座標系には速度も加速度も現れないのでコリオリーの力 $\boldsymbol{B}$ も慣性力 $\boldsymbol{I}$ も関与しない）．座標系の原点 O' は剛体の重心に一致しているとする．すなわち，

$$\Sigma m\boldsymbol{R} = 0 \tag{46.1}$$

であるとしておく．

《問題 1》 この座標系では遠心力のベクトル和はゼロであることを示せ.

《問題 2》 この座標系ではオイラーの力のを総和はゼロであることを示せ.

この座標系では，遠心力の合力とオイラーの力の合力はともにゼロであり，外力とアインシュタインの力が釣り合っていなければならない：

$$\overline{\boldsymbol{F}}-\Sigma m\ddot{\boldsymbol{C}} = 0 \tag{46.2}$$

あるいは，

$$\overline{m}\ddot{\boldsymbol{C}} = \overline{\boldsymbol{F}} \tag{46.3}$$

$$\overline{m} = \Sigma m \tag{46.4}$$

$\ddot{\boldsymbol{C}}$ は重心の加速度であったから，(46.3) 式は重心の関する定理を表している：剛体の重心は，全質量がそこに凝縮し作用している力の合力がその点に働いているように見えあたかも 1 個の粒子のように運動する.

> 《ま　と　め》 剛体の重心の運動に関する法則は，剛体上にとった座標系に現れるアインシュタインの力と外力が釣り合うことであると表現される.

§ 7. 剛体の運動：オイラーの方程式

次に，剛体の釣合に関する第 2 の条件（モーメントの総和がゼロであること）について考察してみよう.

《問題 3》 剛体上の座標系ではアインシュタインの力のモーメント総和はゼロであることを示せ.

アインシュタインの力のモーメントの総和はゼロであるから，剛体に作用している力，遠心力，オイラーの力の三つの力のモーメントがゼロでなければならない.

重心に原点をとった直交座標系 x, y, z を用いる．座標軸は剛体の主軸と一致しているとする．この設定では，慣性能率がゼロであることを意味する．すなわち，

$$\Sigma myz = 0,\ \Sigma mxy = 0,\ \Sigma mxz = 0 \tag{47.1}$$

が成り立っている．さらに，次の記号を導入する：

$$\Sigma m(y^2+z^2) = A$$
$$\Sigma m(z^2+x^2) = B \qquad (47.2)$$
$$\Sigma m(x^2+y^2) = C$$

《問題4》 遠心力の合力（45.11）は次のような成分を持つ；

$$(B-C)\omega_y\omega_z,\ (C-A)\omega_x\omega_z,\ (A-B)\omega_x\omega_y \qquad (47.3)$$

《問題5》 オイラーの力の合力（45.14）は次の成分を持つ；

$$-A\dot{\omega}_x,\ -B\dot{\omega}_y,\ -C\dot{\omega}_z \qquad (47.4)$$

剛体に働いている力のモーメントの和$\overline{\boldsymbol{M}} = \Sigma \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F}$ の成分を

$$\overline{M}_x,\ \overline{M}_y,\ \overline{M}_z \qquad (47.5)$$

と置く．(47.3)，(47.4)，(47.5) のモーメントの和がゼロであることからオイラーの方程式，

$$A\dot{\omega}_x-(B-C)\omega_y\omega_z = \overline{M}_x$$
$$B\dot{\omega}_y-(C-A)\omega_z\omega_x = \overline{M}_y \qquad (47.6)$$
$$C\dot{\omega}_z-(A-B)\omega_x\omega_y = \overline{M}_z$$

が得られる．

この方程式は，瞬間の回転軸 Ω が重心に原点をとった座標系でどのように時間変化するかを記述している．これらは，剛体の運動についての部分的解答をあたえるだけであり，用いた座標系と空間に固定された座標系の関係を求めなければならない．しかし，この問題は本書の範囲を越えている．本書で扱うのはあくまでも力学の一般原理であり，一般原理を理解するのに必要な簡単な例題にとどめる．より進んで学ぼうとする読者は他の参考書を参照されたい．

《ま　と　め》 重心に原点をとる座標系では，剛体の瞬間の回転軸の時間変化を記述するオイラーの方程式は，オイラーの力，遠心力，外力の三つのモーメントの和がゼロになる条件と解釈することができる．

§ 8. ガウスの最小拘束の原理

ダランベールの原理は最小原理（最小値を求める原理）ではない．この原理は，無限小の量——作用している力による仮想仕事に慣性力による仮想仕事を加えたもの——が用いられるが，この量はある関数の変分として表せない．Gauss（1777-1855）は最小原理になるようダランベールの原理を変更した．ガウスの方法は次のとおりである．

運動方程式は，位置座標 q_i の加速度を決定する．そこで，次の問題を考えて見よう．時刻 t で，全粒子の位置と速度があたえられたとする．一方，加速の方は一定の条件を満たしていなければならないがある程度まで任意に決めてもよい．そこで，粒子の加速度の実際の値を $\boldsymbol{A}(t)$ であるとしよう．いま，加速度が $\boldsymbol{A}(t)+\delta\boldsymbol{A}(t)$ に変化したとすると次のような効果が現れる．時刻 $t+\tau$ での粒子の位置はテーラー展開して

$$\boldsymbol{R}(t+\tau)=\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{v}(t)\tau+\boldsymbol{A}(t)\tau^2/2 \tag{48.1}$$

であたえられる．加速度の変分は，粒子の軌道を変化させるであろう．初速度も初期位置も変えていないので (48.1) 式の第 1，2 項の変分はゼロである．したがって，τ が小さいとして 2 次以上の項を無視すれば

$$\delta\boldsymbol{R}(t+\tau)=\delta\boldsymbol{A}(t)\tau^2/2 \tag{48.2}$$

が得られる．この結果は，加速度の変分を定義するときの拘束条件に無関係に成立する．

さて，ダランベールの原理は

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{A}_i)\cdot\delta\boldsymbol{R}_i=0 \tag{48.3}$$

であることを主張した．ただし，$\delta\boldsymbol{R}_i$ は拘束条件に矛盾しない仮想変位に等しいであろう．この原理を時刻 $t+\tau$ において用いることにし，(48.2) 式を満たす $\delta\boldsymbol{R}_i(t+\tau)$ があたえられているとする．(48.2)，(48.3) 式から

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{A}_i)\delta\boldsymbol{A}_i=0 \tag{48.4}$$

が導かれる．外力 $\boldsymbol{F}_i$ は一定に保たれているから，(48.4) 式は

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{A}_i)\ \delta\left(\frac{\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{A}_i}{m_i}\right)=0 \tag{48.5}$$

と書くことができる．すなわち，

$$\delta\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{A}_i)^2 = 0 \tag{48.6}$$

である．Gauss は

$$Z = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{A}_i)^2 \tag{48.7}$$

を運動の「拘束」と名付け，(48.6) 式を「最小拘束の原理」とした．この原理は，実際に起きる運動ではあたえられた拘束条件の下で拘束は最小であることを主張する．もし粒子が拘束に無関係ならば，$\boldsymbol{Z}$ の値をゼロと置けば，(48.7) 式から

$$m_i\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{F}_i \tag{48.8}$$

が得られる．これがニュートンの運動方程式に他ならない．拘束は加速度 $\boldsymbol{A}_i$ と無関係に選ぶことはできないが，あたえられた付加条件のもとで $\boldsymbol{Z}$ の値を最小にすることはできる．その解が系で実現される運動である．

〔例〕 粒子が面

$$z = f(x,\ y) \tag{48.9}$$

上にあって，外力 $\boldsymbol{F}$ の作用を受けているとする．系の運動方程式を求めよ．この場合，

$$\ddot{z} = f_x\ddot{x}+f_y\ddot{y}+f_{xx}\dot{x}^2+\cdots \tag{48.10}$$

が成り立っている．最小にすべき量は

$$(F_1-m\ddot{x})^2+(F_2-m\ddot{y})^2+(F_3-m\ddot{z})^2 \tag{48.11}$$

である．ここで，z は，(48.10) 式であたえられており，独立変数は x と y だけである．ガウスの方法を用いると

$$F_1-m\ddot{x}+(F_3-m\ddot{z})f_x = 0$$
$$F_2-m\ddot{y}+(F_3-m\ddot{z})f_y = 0 \tag{48.12}$$

が得られる．これは，運動方程式に他ならない．

この原理は，誤差論の最小自乗法（Gauss と Legendre によって提案された）に類似しており Gauss が好んで用いた方法である．実験から決定される関数関係がパラメータを含んでいる場合，もし実測値の数とパラメータの数が同じならば問題は簡単に解ける．しかし，実測値の方がパラメータの数より多く

なると測定誤差のために求めた方程式の間に矛盾が生ずることになる．関数関係の仮言的な値と実測値の差が誤差である．誤差の自乗和を最小にする条件でパラメータの値が決定される．

Z を最小にする原理は，上に述べた原理と全く同じである．(48.7) 式の $3N$ 個の項が $3N$ の測定値に該当する．この数は，m 個の拘束条件下での未知数 $\ddot{q}_i$ の数よりも多い．この場合の「誤差」は，作用している外力と慣性力（＝質量×加速度）の差である．Z の表示に現れた因子 $1/m_i$ はあたかも測定の信頼係数に似ており，「重み」と解釈できる．

条件 (48.6) は Z の停留値を決定しているだけのように見えるが，考察した例では特に条件をつけなくても停留値が最小値になっている．このことは，Z は正の量の和で表されており，どこかで必ず最小値を持つことから証明される．したがって，停留値の条件が一意的な解をあたえているとするとその解は Z の最小値をあたえるはずである．ガウスの原理の解の一意性は次のようにして証明される．上の例では $\ddot{z}$ が $\ddot{x}$ と $\ddot{y}$ の 1 次の関数であった．一般に，拘束条件を時間で 2 回微分すると，加速度の間の関係はいつも<u>線型</u>であることが分かる．このことを利用して余分の加速度を消去すると変分を施そうとしている残りの加速度に関して 2 次関数として Z を表すことができる．こうしてわれわれは一意的な解を持つ連立<u>1 次</u>方程式を得る．

ガウスの最小拘束の原理は，最小値原理であり，この点では最小作用の原理と同じであるが，時間積分を含んでいない分だけ簡単である．しかし，最小作用の原理では速度について考察すればよかったが，この原理では<u>加速度</u>について考察しなければならず利点も相殺されてしまうともいえる．それゆえ，ガウスの原理の方が不便である．しかし，ガウスの原理には最小値問題という特徴を保存したまま，ホロノーム系だけでなく非ホロノーム系にも適用できるという長所がある．最小作用の原理の場合には，最小値問題の性格を保とうとすると非ホロノーム系には適用できなくなってしまった．

Hertz[1)]は，外力の働いていない系におけるガウスの原理の幾何学的意味を論じた．彼は，この特別の場合には拘束 Z は $3N$ 次元ユークリッド空間（直交座標系は，$\sqrt{m_i}\,x_i$，$\sqrt{m_i}\,y_i$，$\sqrt{m_i}\,z_i$ である）の点（C 点）の測地線と解釈できることを示した．拘束条件を考慮すると，系の C 点は $3N$ 次元空間の部分空間内

に閉じ込められている．最小拘束の原理は，C点の軌道はあたえられた拘束条件の下で最も短い経路であるという原理として表される．このことは，C点の軌道が可能な限り直線に近いものでなければならないことを意味する．ヘルツの「曲率最小軌道の原理」によれば，ガウスの原理は配位空間での弧の長さを最小にすることを要求するヤコビの原理とも密接に関係している．ヘルツの原理の曲線は，3N 次元空間に埋め込まれた曲がった配位空間での測地線と見なすことができる（第1章 §5）．

Appell[2] はガウスの原理に少し手を加えた．修正された原理は，非ホロノームな条件のある場合に運動方程式を導く場合や，§2で扱った運動学的変数で定式化される問題を扱うのに大変適している．

《ま　と　め》　変分の特殊な形式として Gauss は，ダランベールの原理を最小値原理に変形した．その結果，加速度を変数と見なした上で Gauss が拘束と呼んだスカラー量に関して最小値原理が得られた．最小値原理としてのガウスの最小拘束の原理は，最小作用の原理に匹敵する．定積分ではなくスカラー関数の最小値を求めればよく特別の変分法を用いなくても済む点で，最小拘束の原理の方が最小作用の原理に勝っている．しかし，前者には，加速度を変数に用いるという難点がある．一般に加速度を求めるには面倒な計算が付きまとうのが普通であるが，最小作用の原理においては1次微分量のスカラー関数を用いてすべての議論が進められる．

1) H. Hertz; Principles of Mechanics (London, 1900)

2) P. E. Appell; Sur une forma generale des equations de la dynamique (Paris, 1925)

第 5 章 ラグランジュの運動方程式

はじめに

この章では代表的な変分原理，すなわち，定積分の最小値――一般的には停留値――に関する変分原理について考察する．慣性力が非単生的であったことによる困難は，時間積分を考えることで克服される．こうすることで動力学の問題は，スカラー関数の積分の性質を調べる問題に還元され，この積分の停留値の条件からすべての運動方程式が導かれる．

Euler，Lagrange，Jacobi，Hamilton らの名前が付けられているいろいろの変分原理があるが，これらの原理の間には密接な関係があり，広い意味に解釈するとどの原理も「最小作用の原理」である．これらの原理を解説するに当たって，歴史的順序にとらわれずハミルトンの原理の説明から始める．この原理は，ダランベールの原理を最小値問題に移す最も直接的かつ自然な方法である．オイラーとラグランジュの変分原理やヤコビの原理はハミルトンの原理の特別の場合であることを示す．

§ 1. ハミルトンの原理

ダランベールの原理は，積分可能でない量の微分を用いて定式化される．無限小の量 $\overline{\delta w^e}$――外力と慣性力による仮想仕事の和――はゼロと置いた．仕事の二つの部分は，その本性において非常に異なる量である．すなわち，外力の仮想仕事は単生的であって仕事の関数から求められるが，慣性力による仮想仕事は1個のスカラー関数の微分としては表されず個々の粒子ごと別々に求めな

ければならない．こうした事情のため慣性力の方は外力に比べてやや取扱が不便な量である．ダランベールの原理を単生的な変分形式に書き換えられたなら，それは理論的にも実用的にも大変有用であろう．時間に関する積分をとれば慣性力のなす仕事も単生的な形式にできることを発見し（Euler とLagurange もすでに気が付いていたようである），ダランベールの原理を別の形式に書き換えたのが Hamilton であった．

$\overline{\delta w^e}$ に dt を掛けて，時刻 t_1 から t_2 まで積分する：

$$\int_{t_1}^{t_2}\overline{\delta w^e}dt \equiv \int_{t_1}^{t_2}\Sigma[\boldsymbol{F}_i-\frac{d}{dt}(m_i\boldsymbol{v}_i)]\delta\boldsymbol{R}_i dt \tag{51.1}$$

この式の右辺を二つの部分に分ける．第1の部分は

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma\boldsymbol{F}_i\delta\boldsymbol{R}_i dt = -\int_{t_1}^{t_2}\delta V dt = -\delta\int_{t_1}^{t_2}V dt \tag{51.2}$$

と書くことができる．ここで，仕事に関数は速度に依存しないと仮定し，$V = -U$ を用いた．第2の部分は，部分積分を行って，

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(m_i\boldsymbol{v}_i)\delta\boldsymbol{R}_i dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(m_i\boldsymbol{v}_i\delta\boldsymbol{R}_i)dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}m_i\boldsymbol{v}_i\frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{R}_i)dt \tag{51.3}$$

と書ける．(51.3) 式の右辺の第1項は，積分でき境界値

$$-[m_i\boldsymbol{v}_i\delta\boldsymbol{R}_i]_{t_1}^{t_2} \tag{51.4}$$

が得られる．一方，第2項は変分と微分演算は可換であること（(29.3) 式を参照）を使って次のように計算される：

$$\int_{t_1}^{t_2}m_i\boldsymbol{v}_i\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{R}_i dt = \int_{t_1}^{t_2}m_i\boldsymbol{v}_i\delta\boldsymbol{v}_i dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}m\delta(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)dt = \frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}m_i\boldsymbol{v}_i^2 dt \tag{51.5}$$

ここで粒子について総和をとれば最終的に，

$$\int_{t_1}^{t_2}\overline{\delta w^e}dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\Sigma m_i\boldsymbol{v}_i^2 dt-\delta\int_{t_1}^{t_2}V dt-[\Sigma m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\delta\boldsymbol{R}_i]_{t_1}^{t_2} \tag{51.6}$$

が得られる．(51.6) 式のように運動エネルギー T を導入し，

$$L = T - V \tag{51.7}$$

を定義する．この関数が解析力学で最も重要な関数の一つであり，ラグランジュの関数（ラグランジァン）と呼ばれる．

以上の定義を用いると，(51.6) 式は，

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{\delta w^e} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - [\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{R}_i]_{t_1}^{t_2} \tag{51.8}$$

と書き換えることができる．ここまでの扱いでは $\delta \boldsymbol{R}_i$ は位置ベクトル $\boldsymbol{R}_i$ のどのような意味での変位でもよかった．ここでは $\delta \boldsymbol{R}_i$ は時刻 t_1, t_2 ではゼロであるとする：

$$\delta \boldsymbol{R}_i(t_1) = 0, \ \delta \boldsymbol{R}_i(t_2) = 0 \tag{51.9}$$

時刻 t_1, t_2 では力学系の状態は固定されていて，その時刻では変分をとることができない．両端での力学系の状態は指定されているので，このことを「両端を除く領域での変分」と呼ぶことにする．このように仮定しておくと，(51.8) 式の右辺に現れた境界項はゼロであり，有効力の仮想仕事の時間積分は定積分の変分に等しい：

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{\delta w^e} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta A \tag{51.10}$$

ただし，A は，

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{51.11}$$

と定義する．ダランベールの原理はどの時刻でも $\overline{\delta w^e}$ はゼロであることを要請するから，(51.10) 式の右辺はゼロでなければならない．したがって，ダランベールの原理は，

$$\delta A = 0 \tag{51.12}$$

と表現することができる．これが「ハミルトンの原理」であり，力学系の初期状態と終状態が指定されているとき，系の配位の任意の変分に関して定積分 A が停留値をとる運動が実現すると主張する．

Hamilton は Euler と Lagrange の先駆的研究によって達せられた原理により進んだ数学的形式をあたえたのである．時間積分を利用する点はすでに Lagrange も気

が付いていた．Jacobi の命名による「ハミルトンの原理」なる用語は，前世紀にはまだ使われていない．この用語が教科書に登場するようになったのは今世紀に入ってからである．

ハミルトンの原理に至る道筋を逆にたどることもできる．δA が任意の変分に対してゼロになるという要請から始めて，(51.10) 式の左辺に δA を移項し $\delta w^e = 0$ と置けば，それはダランベールの原理に他ならない．この点を数学的に見ると，ハミルトンの原理とダランベールの原理は全く同等であるということであり，力学系に作用している力が単生的である限り，二つの原理の適用範囲も同じであることを示している．非単生的な外力の場合には，ダランベールの原理は最小値問題（厳密には，停留値問題）に書き換えることはできない．ホロノームな付加条件は，力学的には単生的力と同等であり，非ホロノームな付加条件の方は非単生的力と同等である．したがって，ハミルトンの原理は単生的力が働いている力学系とホロノームな付加条件が課せられている力学系ならば，常に成立する原理なのである．ここで，外力と付加条件に関しては保存性（すなわち，時間依存性を持たないこと）は仮定されていない．

ダランベールの原理は，運動の瞬間ごとに独立な表現形式をとっているが，ハミルトンの原理ではそれらすべての内容をただ一つの表現形式でいい表している．運動は，全経過をひとまとめにして考察される．

変分原理には統一的見方を保証する量が存在する点は，まさに特筆すべきことである．現代物理学の発展は，相対論と量子力学の出現によって装いを新たにするが，変分原理を用いてそれぞれの基礎となる方程式を導くという方法論は依然として活用されている．相対論の方程式も波動力学の方程式も最小作用の原理から導くことができるという点では従来の方程式と共通している．ラグランジュの関数 L を対象に応じて定義すればよいことになる．

《ま　と　め》 時間積分を導入すれば，慣性力の仮想仕事も完全微分形に変形することができる．こうしてダランベールの原理は数学的に再構築されてハミルトンの原理となる．ハミルトンの原理は，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの差で定義されるラグランジュの関数の時間についての定積分が停留値をとるべきであることを要求する．変分は，両端を

除く時間領域でとるものとする．

§ 2. ラグランジュの運動方程式と点変換の不変性

最小作用の原理は，直交座標系を用いて定式化された．しかし，力学系には拘束条件が課せられているものがある．もしそれらがホロノームな条件なら，力学系の 3N 個の直交座標は (12.8) 式や (18.3) 式のように n 個の一般化座標 q_1，……，q_n を用いて表すことができる．その結果，ポテンシャル・エネルギーも運動エネルギーも一般化座標と一般化運動量 $\dot{q}_1$，……，$\dot{q}_n$ の関数として表すことができる．力学系の運動は，一般化座標の張る n 次元配位空間の C 点の運動として描くことができる．この議論をさらに展開して時間も次元の一つに追加した上で幾何学的に運動を表現することもできる．「拡張された配位空間」は $n+1$ 次元となり，独立変数は一般化座標 q_k と時間 t である[1)]．この空間での運動の経緯は，ある曲線上の点の運動として表現される．C 点の描く曲線「世界線」は，力学系の運動の全体像の幾何学的描像をあたえる．

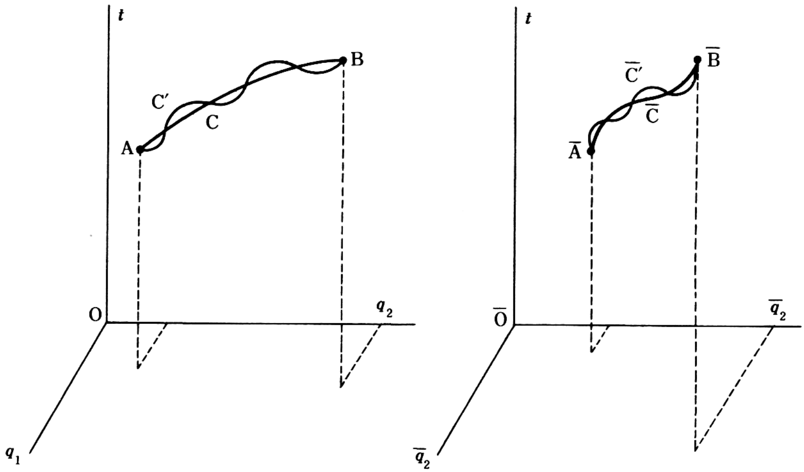
この描像では，t_1 と t_2 の間の時刻での力学系の状態の変分は，世界線 C の変分である．両端の時刻での状態は固定されており，変分はこの 2 点の間に限定されている．このことは，曲線 C と変分を受けた曲線 C′ は両端の点 A，B では一致していなければならない．この表現では，時間変数 t はもはや特別視されなければならない変数ではなく，そのうえ独立変数と見なす必要もなくなっている．一般化座標 q_k も時間 t もパラメータ τ の関数と見なして，世界線を τ で特徴付けることができる．

作用積分 (51.11) が停留値をとるための必要十分条件は，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \ (i = 1, \cdots\cdots, n) \qquad (52.1)$$

である．注目すべき点は，定積分の最小値問題は座標系の選び方に無関係であるということである．いま，点変換 (14.3) によって座標系 q_i から新しい座標

1) 力学の幾何学化を目的として時間をも次元に加えるというアイデアは Lagrange による (Mecanique Analytique, 1788)．



第5図

系 $\overline{q_i}$ に移ったとしよう．この点変換は，n 次元配位空間の自分自身への写像であるから（第1章 § 4），(q, t) 空間では曲線 C が新しい曲線 $\overline{C}$ に変形される．変分を受けた曲線 C' は，$\overline{C}$ に対応する曲線 $\overline{C}'$ に変形される．(q, t) 空間で両端を除く変分は $(\overline{q}, t)$ 空間でも同じように両端を除く点での変分を意味する．定積分 A の変分がゼロという条件から，新しい座標系を用いて計算される A の変分もゼロでなければならない．したがって，オイラー・ラグランジュの偏微分方程式を新しい座標系でも同様にして導くことができる．ラグランジュの関数 L と作用積分 A は，点変換に関して不変である．q_i としては新しい変数 $\overline{q_i}$ の関数として表した量を代入すればよい．新しい変数を用いた場合のラグランジュの関数の関数形は元のものと異なるが，その値は変わらない．同様に，曲線 C に沿って計算される作用積分の値も曲線 $\overline{C}$ に沿って求める作用積分の値に等しい．一つの添字 i だけ取り出してみると，元のラグランジュの運動方程式は新しい座標系では対応する運動方程式に変換されていないが，運動方程式の完全系は，新しい座標系でも対応する方程式の完全系に変換される．なぜなら，ラグランジュの運動方程式は作用積分 A の変分をゼロにすることで導かれたものであるが，この原理は座標系の選び方に無関係であるからである．

時間 t も変数の一つに採ってあるので，新旧座標間の関係式が時間に依存するものであっても上の議論はそのまま成り立つ．そのような時間に関係した関係式を利用しなければならない場合は，動いている座標系で力学現象を記述するときである．ラグランジュの運動方程式は，動いている座標系を用いる場合でもその有効さを保っている．

数学的に考察する際に，任意の点変換に関してラグランジュの運動方程式が不変であるという特徴が特に重要になる．これらの方程式は，19世紀には一つの指導原理であった「不変性の原理」の最初の例であった．この原理は，現代物理学でもその重要さを増しつつある．ラグランジュの運動方程式の不変性は，こうした不変性の中で最も重要なものの一つである．不変性があるお蔭で，われわれは問題に適した座標系を選ぶことができる．ラグランジュの方程式の一般的解法はいまのところ知られていないから，われわれの成し得る最善の手段は，方程式の一部分だけでもよいから解くことのできる座標系を見つけることである．ダランベールの原理に比べて最小作用の原理が優れていた点は，1個のスカラー関数 L を用いるだけで十分である点にあった．粒子の加速度を決定したり慣性力のなす仮想仕事を求めたりする手間が省けるのである．スカラー関数 $L = T-V$ が力学系の運動全部を決定する．

《問題 1》 軸受と重心の作る平面が鉛直になるようにとり，角度を用いて物理振子の運動を記述せよ．運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーは

$$T = I\dot{\theta}^2/2, \quad V = Mgl(1-\cos\theta)$$

と書けることを示せ．ただし，I は軸受の周りの慣性モーメント，M は振子の質量，l は軸受と重心の間の距離である．ラグランジュの方程式を導き，θ は小さいとしてそれを解け．

《問題 2》 極座標 r, θ を用いて惑星の運動を記述せよ．太陽は原点に位置しているとして，

$$T = m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)/2$$
$$V = -fmM/r$$

があたえられることを示せ．ラグランジュの方程式を導け．

《問題 3》 長さ l の球状振子の状態を極座標 r, θ, ϕ を使って記述せよ．

$$T = \frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

$$V = mgl(1-\cos\theta)$$

であることを示せ．ラグランジュの運動方程式を導出せよ．

基本的な関数 T と V は，ニュートン方程式（質量×加速度＝力）の両辺の物理量に対応する．ニュートン方程式は，慣性力と外力の釣合と解釈することもできる．解析的表現は，同じ釣合の式が仕事の関数と運動エネルギーに分けて考えることで求められる．ラグランジュの方程式は，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{52.2}$$

と書くこともできる．n 個の量

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{52.3}$$

は配位空間での慣性力の n 個の成分を表している．同様に

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{52.4}$$

は作用している外力の n 個の成分である．

通常，U は q_i のみの関数であり (51.4) 式の第1項は落とすことができる．その上で，U を $-V$ で置き換えられる．しかし，仕事の関数の $\dot{q}_i$ 依存性を除外しなければならない理由はどこにもない．相対論的力学ではこの種の依存性にも出会うであろう．荷電粒子に働く電磁力は，速度依存性を持つ仕事の関数から導くことができる．

> 《まとめ》 ハミルトンの原理から，ラグランジュの運動方程式が導かれる．座標変換に関する不変性がこれらの方程式の特徴である．

§ 3. ハミルトンの原理で見たエネルギー保存則

ダランベールの原理から導かれたエネルギー保存則（第4章 § 3）を，ハミルトンの原理からも導くことができる．このことを証明する過程で力学系の全エネルギーとラグランジュの関数の間には一般的な関係が存在することが分かってくる．

このことを示すために前にダランベールの原理でエネルギー保存則を導いたときに用いた特別な変分をもう一度利用しよう．各時刻での仮想変位 δq_i は無限小の時間 $\delta t = \varepsilon$ に実際に起きた変位 δq_i に等しいとする．このことは，

$$\delta q_i = dq_i = \varepsilon \dot{q}_i \tag{53.1}$$

と置くことである．

《問題 4》 この変分を q–t 図に描き実現した曲線が ε だけ垂直下方にずれたものになっていることを示せ．この場合，時間 t については変分がとられていない点に注意せよ．

この変分では，座標 $q_i(t)$ の変分は時刻 t_1，t_2 でも許されているので，もはやこれは「両端を除いた変分」ではない．両端で座標の変分を許さない条件での変分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{53.2}$$

から運動方程式が導かれることはすでに示した．では，端点での変分を許す場合には作用積分の変分からどのようなことが結論されるのであろうか．定積分の変分をとるとき部分積分法を用いて両端での変分は境界項として扱える．このとき，

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \tag{53.3}$$

が得られる．

ここで大変重要な意味を持つ物理量を導入しなければならない．ラグランジュの関数を速度で偏微分して得られる量は，解析力学では特に重要な役割を担っている．それゆえ，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{53.4}$$

と置き，これを「一般化された運動量」と呼ぶことにしよう．1粒子系を考え直交座標系で運動を記述するときは，3個の量 p_1，p_2，p_3 は運動量 mv の三つの成分に等しいことからこの名称が選ばれた．一般的な場合には，物理量 p_i は初等的な意味とは異なり，配位空間でのベクトル成分として扱わなければなら

ない．p_i を独立変数にすべきであることに気が付いたのは Hamilton であった．彼は，運動量が力学変数に組み込まれる新しい理論を完成した．p_i を中間的な変数として用いるならラグランジュの運動方程式は変形され，より簡単な方程式

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{53.5}$$

にまとめられる．運動量を用いると (53.3) 式は次のように書ける：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = [\Sigma p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2} \tag{53.6}$$

座標 q_i の変分としては (53.1) のような特別なものを選ぶことにしよう．そうするとラグランジュの関数 L の変分と時間 dt 間に生じた L の実際の変化とを関係付けることができる．力学系は，scleronomic（第 1 章 § 8），すなわち，ラグランジュの関数 L は時間に陽に依存していないと仮定する：

$$L = L(q_1,\ \cdots\cdots,\ q_n\,;\ \dot{q}_1,\ \cdots\cdots,\ \dot{q}_n) \tag{53.7}$$

条件 (53.1) の下では，L の変分は

$$\delta L = dL = \varepsilon\dot{L} \tag{53.8}$$

となることが容易に確かめられる．それゆえ，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta L dt = \int_{t_1}^{t_2}\varepsilon\dot{L} dt = \varepsilon[L]_{t_1}^{t_2} \tag{53.9}$$

が得られる．一方，(53.6) 式の右辺は

$$[\Sigma p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2} = \varepsilon[\Sigma p_i \dot{q}_i]_{t_1}^{t_2} \tag{53.10}$$

に等しい．これらのことから，

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{53.11}$$

であることが結論される．この結果は，物理量 $\Sigma p_i \dot{q}_i - L$ の時刻 t_1 での値は時刻 t_2 での値に等しいことを示している．しかし，時刻 t_1 も t_2 も任意に選べる変数であり運動方程式にも現れないから

$$\Sigma\, p_i \dot{q}_i - L = 一定 \tag{53.12}$$

であることが分かる．

この基本定理の証明には，L の関数形について時間 t を陽に含まないこと以

外には何も仮定しなかった．多くの力学の問題では，L は $T-V$ に等しく，T と V の関数形はよく知られた特徴を備えている．運動エネルギー T は速度 $\dot{q}_i$ の2次形式（(15.16) 式を参照）であたえられる：

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{53.13}$$

ここで a_{ik} は q_i の関数である．一方，ポテンシャル・エネルギーは一般に速度に依存しない．この条件が満たされていれば，運動量は

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_k \tag{53.14}$$

に等しいので，

$$\Sigma p_i\dot{q}_i = \Sigma a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 2T \tag{53.15}$$

となる．したがって，方程式 (53.12) は

$$2T-(T-V) = T+V = \text{一定} = E \tag{53.16}$$

であることを示す．これはエネルギー保存則である．

上の証明は，エネルギー保存則としてよく知られた形式のものを導いた．すなわち，「運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和は一定である」という法則は特別の条件が満たされる場合に限って成り立つ．力学系が scleronomic であるという条件だけでは不十分である．運動エネルギーが速度の2次関数であることとポテンシャル・エネルギーが速度に依存しないことの二つの条件が満たされていなければならない．興味ある力学系の中には，速度に関して2次ではなく1次の関数となる「ジャイロスコープ項」を持つ系もある．相対論的力学では，ラグランジュの関数の運動エネルギーに関する部分はニュートン力学の場合よりも複雑な形で速度に依存している．このような力学系でも scleronomic であれば，エネルギー保存則はやはり成り立つ．しかし，法則の形式は (53.12) 式の方をとる．

1自由度系では，エネルギー保存則が力学の問題の完全解の一つになっている．この系では，(53.12) 式は，

$$f(q, \dot{q}) = E \tag{53.17}$$

と書かれるが，この式から

$$\dot{q} = \psi(E, q) \tag{53.18}$$

が得られる．この式を積分すれば，

$$t = \int \frac{dq}{\varphi(E, q)} + \tau \tag{53.19}$$

が得られ，時間 t が q の関数として決まる．これを逆に解けば q が t，E，τ の関数として求められる．

《問題5》　1次元振子

$$T = m\dot{x}^2/2, \quad V = kx^2/2$$

の問題をエネルギー保存則を利用して解け．

《問題6》　§1で考察した物理振子の場合を同じ方法で解け．

物理量

$$\Lambda = \Sigma p_i \dot{q}_i - L \tag{53.20}$$

は，力学系の全エネルギーと解釈することができる．これはラグランジュの関数とともに最も重要なスカラー量である．追って示すように，ハミルトンの形式では Λ の方がラグランジュの関数よりも重要になってくる．この物理量は適当な力学変数を用いて表現するとラグランジュの関数に代わるハミルトンの関数（ハミルトニアン）になることが分かる．

力学系のラグランジュの関数 L が時間 t に依存する場合

$$L = L(q_1, \cdots\cdots, q_n ; \dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_n ; t) \tag{53.21}$$

の全エネルギー Λ について考えてみよう．この場合には，δL と dL とはもはや等しくない．(53.8) 式に代わってもっと一般的な関係

$$\delta L = dL - \frac{\partial L}{\partial t}dt = \varepsilon\left(\dot{L} - \frac{\partial L}{\partial t}\right) \tag{53.22}$$

があるので，(53.11) 式は次のように一般化される：

$$[\Sigma p_i \dot{q}_i - L]_{t_1}^{t_2} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{53.23}$$

このことは，全エネルギー Λ は保存されずその時間変化が

$$\Delta\Lambda = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{53.24}$$

であたえられることを示している．

《問題 7》　1個の振子が定滑車に取り付けられている．振子の紐の一方の端はゆっくりと定速度で引き上げられているとする（Ehrenfest の振子）．摩擦は無視できるとして，振子の振り幅は次の式に従って増大することを示せ．$\theta = 0$ のところで一周期に変化する全エネルギーは

$$\varDelta E = -\frac{1}{2}\frac{\varDelta l}{l}E$$

であたえられる．E は摂動を受けていないときのエネルギーとする．

《ま　と　め》　スクレロノーミックな系のラグランジュの運動方程式は，$\Sigma p_i\dot{q}_i - L = E$ の形式の第1積分を持つ．この式の左辺を系の全エネルギーと定義すれば，第1積分はエネルギー保存則と解釈することができる．通常の力学系では $\Sigma p_i q_i$ は運動エネルギーの 2 倍に等しく，$T+V = E$ としてエネルギー保存則が得られる．

§ 4.　循環座標とその消去法

ラグランジュの運動方程式の一般的解法は見つかっていないことはすでに指摘したとおりである．しかし，ある種の条件が満たされている場合には少なくとも部分的な解を求めることができる．特に重要な場合は循環変数（不活性な変数ともいう）が現れる場合である．

ラグランジュの関数は一般には位置座標 q_i と速度 $\dot{q}_i$ の関数である．ラグランジュの関数がある自由度に関して速度 $\dot{q}_k$ は含むけれども位置座標 q_k は含まないこともあり得る．この種の変数の重要性を最初に指摘したのは Routh であり，少し後になって Helmholtz もこのことに気付いたようである．Routh はこの種の変数を「不在（absent）変数」と呼んだ．J. J. Thomson は「不活性（Kinosthenic）変数」とか「迅速な（speed）変数」と呼んだ．Helmholtz は，この種の変数を「循環変数」と名付けた．Whittaker は「無視できる変数」と呼んでいる．この教科書では，「循環変数」という用語を使うことにした．

(53.4) 式のように運動量を定義すれば，ラグランジュの運動方程式は次のように書ける：

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{54.1}$$

いま，q_k が循環変数であったとすると

$$\partial L/\partial q_k = 0 \tag{54.2}$$

が成り立ち，(54.1) 式から

$$p_k = c_k = \text{一定} \tag{54.3}$$

が得られる．循環変数に共役な運動量は定数である．これは，重要な定理の一つであり，多くの問題を解く場合に役立つ．

《問題 8》 §2の問題2と同じ惑星の問題を考える．循環変数に共役な運動量 p_θ が定数であることからケプラーの面積則が導かれることを示せ．

《問題 9》 §2の問題3と同じ物理振子の問題を考える．循環変数に共役な運動量に関して前問と同じように物理的説明を加えよ．

定義 $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ には $\dot{q}_k$ は現れるが位置座標 q_k は現れないから，(54.3) 式から速度 $\dot{q}_i$ を循環変数以外の座標と速度の関数として求めることができる．簡単のために仮に循環変数が1個の場合を考えよう．複数の循環変数が存在する系への拡張は自明である．位置座標 q_n が循環変数であるとしよう．すなわち，

$$\partial L/\partial \dot{q}_n = c_n \tag{54.4}$$

である．したがって，

$$\dot{q}_n = f(q_1,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1}\ ;\ \dot{q}_1,\ \cdots\cdots,\ \dot{q}_{n-1}\ ;\ c_n\ ;\ t) \tag{54.5}$$

が得られる．ラグランジュに関数が速度 q_n を含む（q_n は含まれない）ときは，いつでもその変数は (54.5) 式の右辺で置き換えればよい．こうして，ラグランジュの運動方程式を解く問題は循環変数以外の変数で書かれた問題に還元される．還元された問題が解けて座標 q_i も速度 $\dot{q}_i$ も t の関数としてあたえれば，その結果を (54.5) 式に代入すれば循環変数 q_n が求められる．

ラグランジュの運動方程式を求めた段階で問題が還元できたのであれば，なぜ運動方程式を立てる前に循環変数を消去できなかったのだろうか．われわれはすでに，積分

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \cdots\cdots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n; t)dt \qquad (54.6)$$

は両端を除く区間で q_i の1次の変分はゼロであることは知った．ここで，(54.5) 式を使って q_n を消去すれば，はじめから $n-1$ 自由度の問題を考えることになる．循環変数をすべて消去してから変分問題を考察すればより簡単な問題になる．ただし，(54.4) 式は実現する運動に対してだけでなく変分を受けた運動に対しても成り立っているとしたときに限って (54.5) 式で q_n が循環変数でない残りの変数で表現される点に注意する必要がある．A の変分はすべての q_i の変分に関してゼロとなるのであって，循環変数 q_n の変分になんらかの制約を課さなければならないような理由はどこにもない．ただし，q_n は (54.5) 式で決定されるから積分の両端では q_n の変分がゼロという条件だけは破られている．したがって，(53.3) 式から

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = [\, p_n \delta q_n\,]_{t_1}^{t_2} \qquad (54.7)$$

が得られる．しかし，運動量 p_n は曲線 C 上では定数であるから

$$[p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2} = p_n \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_n dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_n \dot{q}_n dt \qquad (54.8)$$

と書くこともできる．したがって，(54.7) 式は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - p_n \dot{q}_n) dt = 0 \qquad (54.9)$$

となる．ここで新しく

$$L - c_n \dot{q}_n = \overline{L} \qquad (54.10)$$

と置き，$\overline{L}$ を「修正されたラグランジュの関数」と呼ぶことにする．

以上のことをまとめると次のようになる：循環変数 q_n を含む作用積分 A を最小にすることは，$p_n = c_n$ を代入して速度 $\dot{q}_n$ を消去し循環変数を含まないように修正された作用積分

$$\overline{A} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{L} dt \qquad (54.11)$$

を最小にする問題に書き換えることができる．循環変数を消去する手続きは，三つの段階に分けられる：

1. 循環変数に共役な運動量に対する方程式を求める：

$$\partial L/\partial \dot{q}_n = c_n \qquad (\alpha)$$

2. あたえられたラグランジュの関数 L を次のように変形する；

$$\bar{L} = L - c_n\dot{q}_n \qquad (\beta)$$

3. (α) 式を解いて速度 $\dot{q}_n$ を消去し，その結果を (β) 式に代入する．こうして，循環変数を含まない新しいラグランジュの関数が得られ，n 自由度の問題は $(n-1)$ 自由度の問題として扱える．

循環変数が複数ある場合も同様に進められる．新しいラグランジュの関数は，

$$\bar{L} = L - \Sigma c_k\dot{q}_k \qquad (54.12)$$

であたえられる．ここで，第2項の総和は循環変数全部についてとる．

《問題1》 上に示した一般論を惑星の問題（第2章の問題2）に適用して $\dot{\theta}$ を消去せよ．還元された問題は1自由度の問題でありエネルギー保存則を利用して解くことができる．

《問題2》 物理振子に対して同様の方法を適用せよ（第2章の問題3を参照せよ）．

《問題3》 循環変数の速度がラグランジュの関数に含まれていない問題を考える．ラグランジュの関数に修正を加えなくても，方程式

$$\partial L/\partial q_n = 0$$

を利用してそれらの変数を代数的に消去できることを示せ．

循環変数の消去は，還元された問題で見るとき興味深い内容をもっている．力学系の運動エネルギーは，

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\dot{q}_i\dot{q}_n + \frac{1}{2}a_{nn}\dot{q}_n^2 \qquad (54.13)$$

であたえられているとしよう．ここで循環変数に関係する速度は他の速度と分離しておいた．循環変数に共役な運動量は

$$p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\dot{q}_i + a_{nn}\dot{q}_n = c_n \qquad (54.14)$$

であるから，ラグランジュの関数は

$$\bar{L} = L - c_n\dot{q}_n = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2}a_{nn}\dot{q}_n{}^2 - \mathrm{V} \tag{54.15}$$

と変更される．まだ，(54.14) 式を利用して速度 $\dot{q}_n$ を消去しなければならない．$\bar{L}$ は

$$-\frac{1}{2}\frac{C_n{}^2}{a_{nn}} \tag{54.16}$$

を含んでいるが，この項は他の速度には無関係な量である．その他に，循環的でない変数の時間微分に関して 1 次の項が $(n-1)$ 項含まれている．

(54.16) 式はポテンシャル・エネルギーに類似しているので V に加えることができる：

$$\bar{V} = V + \frac{1}{2}\frac{C_n{}^2}{a_{nn}} \tag{54.17}$$

残りの項は，少し通常のものとは異なる性格を持っている．それらは運動エネルギーと見なすことができるが，速度に関して線型である．ラグランジュの関数に現れるこのような性質の項は「ジャイロスコープ項」と呼ばれる．なぜなら，この項は，ジャイロスコープの原理に逆らうような振舞いに関係しているからである．回転座標系に現れるコリオリーの力や電流の作る磁力などが，ジャイロスコープ項の効果である．

ジャイロスコープ項が現れるかどうかは，係数 a_{ik} $(i \neq k)$ の値に依存している．すべての a_{ik} がゼロでないなら，循環的な自由度と他の自由度は運動学的に相互作用をしているという．すべての係数 a_{ik} がゼロである場合には，この種の相互作用は存在せず還元された問題にはジャイロスコープ項はどこにも現れない．

[例]：　ケプラーの問題では，θ を消去すると c^2/r^2 の形の見かけのポテンシャル・エネルギーが現れる．このことは見かけの斥力は $1/r^3$ に比例するが，引力は $1/r^2$ に比例することを表している．これらの力は，ある地点で釣り合うことがありそこは安定な釣合点である．この点の周りでの動径成分 r の振動は近日点と遠日点の間での変化である．引力が $1/r^3$ より高べキの量に比例するときには，二つの力は安定な釣合状態を実現しない．動径ベクトルも有界な振幅を持たない．惑星の軌道は双

曲線型であるか，太陽に向かって螺旋状に落ちていくかいずれかである．このことは角運動量の大きさに依存して決まる．

《まとめ》 ラグランジュの関数に陽に含まれていない力学変数は循環変数と呼ばれる．循環変数に共役な運動量は時間的に変化しない定数である．ラグランジュの関数を適当に修正すれば循環変数を消去することができる．循環変数を消去すると見かけのポテンシャル・エネルギーが現れる．そのうえ，速度に関して線型の運動エネルギーも現れる．

§ 5. Hertz の力ぬきの力学

循環変数の諸性質は，ポテンシャル・エネルギーの深い意味を解説するために考え出されたヘルツの理論の基礎となっている．力学系は，位置座標によって特徴づけられるが，すべての変数が観測可能であるとは限らない．力学系は直接に観測することのできない「微視的パラメータ」を含んでいるかも知れない．このような微視的パラメータが存在すると考えると，力学系の自由度は実際の自由度よりもはるかに少ないことになる．たとえば，固体は近似的にはいつでも剛体と見なすことができる．しかし実際には，固体分子は平衡位置の周りでたえず振動している．剛体の6個の自由度は剛体の力学的性質を巨視的に記述する場合にだけ十分であるにすぎない．微視的運動は，二つのカテゴリーに分けられる．一つは，循環変数によって記述される運動であり，他は循環的でない変数によって記述される運動である．非循環変数に関係した運動は，巨視的運動において明らかに単生的でない力の起源になっている．典型的な例が，摩擦力である．この力は非単生的であり，観測することのできない分子運動の代用物にすぎない．

これらとは非常に異なる性質の運動は，循環変数に関係している微視的運動である．これらは，隠されている運動である．力学系にはどのような非ホロノーム条件によっても見つけ出すことのできない隠れた運動を内包しているものもあり得る．還元された力学系は，ホロノーム系であり最小作用の原理を満たしているから，隠された運動はどのようにしても検知できない．

このことから，Hertz[1] は外力のポテンシャル・エネルギーは循環変数で表現されるような隠された運動によるものではないかと推測した．方法論の立場から考えてみると，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを用いるという二元論は解析力学にとって不可思議な部分ということもできる．一方，すべての物質は慣性を備えているといい，もう一方で力という概念を用いなければならない．慣性的性質は，質量の存在からだけ導くことのできる何かである．慣性は，質点が一直線に運動する根拠であった．リーマン空間でならどのように複雑な力学系の運動も一点の運動として描き出すことができるからには，同様のことが成り立っていてもよい．われわれは，慣性は物質に本来的に備わっている属性であって，簡単な量から導出することはできないようなものであるに違いなかろうという印象をもっている．しかし，哲学的に見れば，運動エネルギーの中に慣性の痕跡を求められるはずである．力の方はこれ以上簡単な説明を要しない．運動エネルギーが運動の終局的能力であるとするのであるなら，ポテンシャル・エネルギー概念は不用なのではないであろうか．エネルギーを運動とポテンシャルの二つに区分したために力学に忍び込んだ説明不可能な二重性を取り除くことはできないであろうか．Hertz は，ポテンシャル・エネルギーの力学的起源は循環変数で記述された隠れた運動に求めることができると考えたのであった．微視的パラメータの運動に関する拘束条件がヘルツの力学では力に対応している．

着想の域を出ていないとはいえ，このアイデアには何か重要なことが暗示されている．全く異なる視点から始められ，別の発展過程をたどった相対性理論は，ヘルツの力学を受け継いだ一例である．太陽の周りでの惑星の運動は，いかなる力も導入することなくただ慣性だけを用いて説明される．惑星は，ちょうど Hertz がポテンシャル・エネルギーを用いない力学を考え出したように，リーマン空間で最短距離を通って運動する．唯一の違いは，ヘルツの力学では配位空間のリーマン曲率は系に隠れた運動に対する拘束条件で決まるとされたのに対して，アインシュタインの理論では時間空間のリーマン幾何学構造は宇宙に固有の幾何学的性質で決まるとされる点である．

1） H. Hertz; Die Principlien der Mechanik (Barth, 1894), p. 256. J. J. Thomson, Applications of Dynamics of Physics and Chemistry (Macmillan, 1888) 参照.

《まとめ》 循環変数で表現される微視的運動を力学系が内包しているとしても，この運動は系の巨視的なホロノーム性を壊すこともないし，ハミルトンの原理の有効性を損なうこともない．これらの運動は完全に消し去ることができる．この意味で循環的なのである．これらの運動から力を生み出す見かけのポテンシャル・エネルギーが出てくる．このように，Hertz は力学系のポテンシャル・エネルギーの運動学的性質の根拠を隠れた運動に求めた．

§6. 循環変数としての時間：ヤコビの原理，最小作用の原理

ラグランジュの関数が時間を陽に含んでいない力学系を考える．まず，時間変数 t を独立変数にとる代わりに，あるパラメータ τ の関数である $n+1$ 個の変数 q_1，……，q_n，t を用いる．系に自由度は $n+1$ である．τ に関する微分をプライムを付けて表すことにすると作用積分は，

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(q_1,\ \cdots\cdots,\ q_n;\ \frac{q_1'}{t'},\ \cdots\cdots,\ \frac{q_n'}{t'}\right)t'd\tau \tag{56.1}$$

と書ける．この表式には，t' は含まれているが，t は含まれていないから時間が循環変数になっている．

循環変数に共役な運動量は定数であるという定理が利用できる．そのためにはまず t に共役な運動量 p_t を求めておかなければならない；

$$p_t = \frac{\partial(Lt')}{\partial t'} = L-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{q_i'}{t'^2}\right)t' = L-\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L\right) \tag{56.2}$$

この表式は，エネルギー保存則の証明（§3）する際にお目にかかった量である．それは，全エネルギー Λ であった．通常の力学系では Λ は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和である．この方法でもわれわれは重要な定理（保存系に限ったものでない）を得る：時間 t に共役な運動量は全エネル

ギーの符号を変えた量に等しい．t が循環変数（すなわち，保存系）であるときには，

$$p_t = -\Lambda = E = 一定 \tag{56.3}$$

となる．これがエネルギー保存則の新しい導き方の一つである．

この方式はさらに興味ある内容を持っている．変分問題では自由度を一つだけ減らすことにすれば循環変数は消去されることをすでに示しておいた．いま考えている系に当てはめて考えると，時間 t を消去して新しい変分問題を定式化することができる．しかしこの場合，系の時間的経緯がどのようなものかを論じることはできない．

一般論に沿って，ラグランジュの関数を次のように変形してみよう：

$$\overline{L} = Lt' - p_t t' = (L - p_t)t' = \Sigma p_i \dot{q}_i t' \tag{56.4}$$

新しい作用積分は

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i t' d\tau \tag{56.5}$$

であたえられる．(53.15) 式を用いるとこの式は

$$\overline{A} = 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} Tt' d\tau \tag{56.6}$$

と書ける．19 世紀頃の文献には，この積分は時折

$$\overline{A} = 2\int T dt \tag{56.7}$$

と書いてある．しかし Jacobi は，変分問題としては時間 t は独立変数として扱わなければならないのでこのような表式では不十分であることを指摘している．われわれはまだ問題を完全に還元しきれていないのである．まだ，(56.3) 式を用いて循環変数 t を消去しなければならない．その際，t は従属変数に変わる．この消去法を前提にしない限り，変分原理 (56.6) も (56.7) も利用することはできないのである．

力学系の状態を配位空間の C 点を用いて表すとき，力学系の運動エネルギーは質量 1 の 1 粒子の運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{ds}}{dt}\right)^2 \tag{56.8}$$

として表されることはすでに示した．$\overline{ds}$ は配位空間の線素（第1章§5）である．独立変数は t ではなく τ であるから，(56.8) 式は，

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{ds}}{d\tau}\right)^2 \Big/ t'^2 \tag{56.9}$$

と書かれる．エネルギー保存則 (56.3) を使って t' を求めると

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}}\frac{\overline{ds}}{d\tau} \tag{56.10}$$

となる．一方，(56.6) 式の被積分関数は，

$$T = E-V \tag{56.11}$$

であり，(56.6) 式は

$$\overline{A} = \int_{\tau 1}^{\tau 2}\sqrt{2(E-V)}\,\frac{\overline{ds}}{d\tau}d\tau$$

$$= \int_{\tau 1}^{\tau 2}\sqrt{2(E-V)}\,\overline{ds} \tag{56.12}$$

と書ける．このようにして時間 t を消去した還元された作用積分が得られる．時間は $\overline{A}$ に現れない．さらに，$\overline{A}$ はパラメータ τ にも依存していない．しかし $\overline{ds}$ は完全微分ではないので，積分 $\overline{A}$ の被積分関数 $\sqrt{2(E-V)}$ も $\overline{ds}$ も何かの独立関数の微分形とはならない．このことを強調するために $\overline{ds}$ には「バー」を付けておいたのである．適当なパラメータ τ を独立変数に選ばなければならない．例えば，座標変数 q_i の一つを（仮に，q_n としよう）τ に選ぶことにすれば，残りの座標変数は q_n の関数として決められる．こうすれば，n 自由度の問題は $(n-1)$ 自由度の問題に変わる．力学系の軌道を積分 (56.12) を最小にすることで決定する原理は，ヤコビの原理と呼ばれる．この理論では，時間は表に出てこない．この原理は，配位空間でのC点の軌道を決定するが運動の時間経緯は記述するものではない．もちろん，t を τ の関数として決定する (56.10) 式を解いてその結果を用いることができれば時間経緯も記述できよう．(56.10) 式はエネルギー保存則の一部分にすぎず変分問題の一部ではない．しかし，(56.10) 式こそが運動を決定する変分原理を補完しているのである．

ヤコビの原理は，力学の基本原理の一つである．1粒子系に限るならば，線素 $\overline{ds}$ は通常の3次元空間の曲線座標系の線素に一致する．この場合のヤコビ

の原理は，光線の軌道は積分

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{nds} \tag{56.13}$$

を最小にすることで決定するフェルマーの最短時間の原理によく似ている．ここで，n は屈折率であり媒質の各点ごとに異なる値をとり，$\sqrt{2(E-V)}$ に対応している．Maupertuis はどんな自然現象も作用と呼ばれる物理量をなんらかの方法で最小にするという原理で説明されると考えた．作用に当たる量はもし適当な定義を選ぶならばヤコビの積分 (*56.12*) に一致する．Jacobi は光の屈折の法則はヤコビーの最小作用の原理からもフェルマーの最短時間の原理からも導けることを示そうとした．彼は，光学と力学現象の間には深遠な類似性が横たわっていることを指摘した．この類似性は，以前に J.Bernoulli が指摘していたものであり，後に Hamilton によって光力学理論において研究されたものである．この類似性はまた量子力学の発展において基本的かつ重要な役割を果たした．ここでいう類似性は，ヤコビの原理とフェルマーの原理の関係のことである．したがって，この類似性は 1 自由度系の運動経路と光学の光線との間以上には広げることができない．運動の時間経緯は光学と力学とでは全く異なっているからである（第 8 章 § 7，参照）．

Jacobi は最小作用の原理に関してのラグランジュの方法を批判し，両端を除く区間で変分を実行することの重要さを指摘した．もし，時間を独立変数として定式化したのではこの条件を満たした変分がとれない．その場合には，実現する運動の経路も変分経路もエネルギー保存則を破らないように作用積分の上限を動かさなければならない．それにもかかわらず，Euler と Lagrange による最小作用の原理の定式化は全く正しいのであり，ヤコビの原理との違いは見かけ上のものにすぎない．

上に示したように，ヤコビの原理の導出は二つの段階からなっている．

1. 運動エネルギー項において，時間微分を τ の微分に置き換える：

$$T' = \frac{1}{2}\Sigma\, a_{ik}q_i' q_k' = Tt'^2 \tag{56.14}$$

2. エネルギー保存則

$$\frac{T'}{t'^2}+V = E \tag{56.15}$$

を用いて作用積分

$$\overline{A} = 2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{T'}{t'}d\tau \tag{56.16}$$

に現れた t' を消去し，$\overline{A}$ を最小にする．

Euler と Lagrange の用いた「作用」は，パラメータ τ を用いている点以外はヤコビの原理の基礎である作用積分と同一である．そのうえ，Euler と Lagrange は (56.15) 式を t' を消去することと同等な内容の付加条件を用いたのであった．付加条件は消去法で扱ってもよいし，ラグランジュの未定係数法を利用してもよい．最初の消去法が Jacobi が用いた方法であり，第2の方法が Lagurange が用いた方法である．ラグランジュの未定係数法を用いると，作用積分は，

$$\overline{\overline{A}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\,2\frac{T'}{t'}+\lambda\left(\frac{T'}{t'^2}+V\right)\right]d\tau \tag{56.17}$$

と書ける．未定係数 λ は，容易に求められる．ここでは t' も変分変数であるから，(56.17) 式の被積分関数を t' に関して最小にする条件は

$$-\frac{2T'}{t'^2}-\frac{2\lambda T'}{t'^3} = 0 \tag{56.18}$$

である．この式から

$$\lambda = -t' \tag{56.19}$$

が得られる．したがって，作用積分は

$$\overline{\overline{A}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\frac{T'}{t'^2}-V\right)t'd\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(T-V)t'd\tau \tag{56.20}$$

となる．

新しい変分問題は付加条件のなくなった変分問題になっているから，そこでは時間 t を独立変数と見てはいけない理由はない．その結果，作用積分は

$$\overline{\overline{A}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(T-V)dt = A \tag{56.21}$$

となり，これでハミルトンの原理が再現された．こうして，「最小作用の原理」

から Lagrange がいかにしてラグランジュの運動方程式――この方程式はハミルトンの原理の直接の帰結である――を導出したかが理解される.

《まとめ》 運動をパラメータを用いて表現すれば，時間も変分原理において位置座標の一つとして扱うことができる．時間に共役な運動量は全エネルギーの符号を変えたものに等しい．スクレロノーミックな力学系では，時間が循環変数になり，共役運動量が定数になる．このことがエネルギー保存則の表現である．循環変数としての時間 t を消去すれば，運動の時間経緯ではないが力学系の配位空間での経路を決定する原理が得られる．こうして定式化された原理がヤコビの原理であり，光学のフェルマーの原理に類似した原理である．最小作用の原理と同じ原理を定式化することもできる．最小作用の原理では，実際に起こる運動においても変分を受けた運動においてもエネルギー保存則が満たされているという付加条件の下で運動エネルギーの 2 倍の量の時間積分を最小にしなければならない．ラグランジュの未定係数法を用いてこの原理を定式化すると，ラグランジュの運動方程式が得られる．

§ 7. ヤコビの原理とリーマン幾何学

第 1 章 § 5 で示したように，配位空間の幾何学はユークリッド的ではなくリーマン的である．力学系が N 自由粒子系であるなら，配位空間は $3N$ 次元ユークリッド空間である．粒子座標の間に何らかの拘束条件があるならば，次元数は $3N$ より少ない曲がった空間になりリーマンの線素で特徴づけられる．この線素は力学系の運動エネルギーによって定義され，曲線座標系 q_k を用いて

$$\overline{ds}^2 = 2T dt^2 = \Sigma\, a_{ik} dq_i dq_k \tag{57.1}$$

と表される．

ヤコビの原理は，われわれにホロノーム系の運動と曲がった空間の幾何学には密接な関係があることをはっきり示してくれた．配位空間の線素 $\overline{ds}$ のほかに，リーマンの線素

$$\overline{d\sigma}^2 = (E-V)\overline{ds}^2 \tag{57.2}$$

を導入しよう．(56.2) 式によれば，ヤコビの原理は定積分

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{d\sigma} \tag{57.3}$$

を最小にしなければならない．このことはリーマン空間の2点間の最短距離を求めることと同じである．ポテンシャル・エネルギー V の力学系の運動をリーマン空間の測地線に沿う運動に関係づけることができる．運動の問題は，かくして測地線を求める問題と数学的には同等であることが分かる．

例として，$V = 0$ の場合に限ってみよう．この場合には，外力の働いていない運動が見られ，線素 $\overline{d\sigma}$ を導入する必要もなく配位空間での $\overline{ds}$ を用いればよい．ヤコビの原理は，

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{ds} = 0 \tag{57.4}$$

であることを主張する．このことは，力学系のC点は配位空間の測地線に沿って運動することを示している．その上，エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{ds}}{dt}\right)^2 = E \tag{57.5}$$

が得られる．これは，C点が定速度で運動していることを意味する．

このようにして，Leonardo da Vinci と Galileo が発見した慣性の法則——「慣性の下では粒子は直線に沿って定速度で運動する」——が一般化される．この一般化された法則は，時間に依存しない任意の拘束条件の下で運動する力学系（ホロノーム系）においても成り立っている．ここでいう「粒子」は，3次元空間ではなく n 次元リーマン空間で運動している力学系をさす．

〔例〕： 曲がった面上の粒子の運動を考える．外力は働いていないとする．リーマン空間はこの場合は2次元であり，幾何学は曲面の幾何学と同じである．このとき粒子は，曲面の測地線に沿って運動する．

《問題 19》 ハミルトンの原理から同様の結果を導け．

ここで測地線の原理は，アインシュタインの相対論の原理に関係している点に触れておこう．相対論では運動の問題は，リーマン空間での測地線を見つける問題と同じである．空間と時間は4次元多様体を構成するので，リーマン空

間は4次元になる．別に，万有引力を用いなくても慣性の法則で惑星の運動が決まる．ヤコビの原理は，相対論的力学においても成り立つ．時空間のリーマン幾何学的性質は，宇宙に固有のものであり拘束条件によって決められるという性質のものではない．

《まとめ》 ヤコビの原理は，ホロノーム力学系の運動とリーマン幾何学を関係付ける．外力を受けていず慣性運動だけをしているなら，力学系の代表点，C点，は配位空間の測地線に沿って運動する．配位空間は n 次元リーマン空間である．エネルギー保存則から，速度が一定であることが結論される．これが一般化された慣性の法則であり，粒子が直線上を定速度で動き続けるという法則の拡張になっている．

§ 8. 付加条件：ラグランジュの未定係数の物理的意味

拘束条件の課された力学系での変分法の一般論は第2章 § 12で詳しく述べた．もし拘束条件がホロノーム的であり，変数の間の代数関係

$$f_i(q_1, \cdots\cdots, q_n ; t) = 0 \qquad (i = 1, \cdots\cdots, m) \tag{58.1}$$

で表されるとき，二つの方法があった．付加条件を用いて m 個の座標 q_i を消去すれば，もはや拘束条件の課されていない問題に還元することもできよう．もう一つの方法は，ラグランジュの未定係数法であった．この方法では，変分問題の被積分関数 L が (58.1) 式の左辺に未定係数 $\lambda_i(t)$ を乗じ項の和を含むように変形される[1)]．変形された変分問題では，付加条件をひとまず考慮することなく自由に変分をとることができる．

便宜上，λ_i の符号を変えて

$$\overline{L} = L-(\lambda_1 f_1+\cdots\cdots+\lambda_m f_m) \tag{58.2}$$

と書くことにする．古典力学では，L は $T-V$ に等しい．したがって，上の $\overline{L}$ の変形はポテンシャル・エネルギー V が

$$\overline{V} = V+\lambda_1 f_1+\cdots\cdots+\lambda_m f_m \tag{58.3}$$

1) ラグランジュの未定係数法は，付加条件が q_i だけでなく速度 $\dot{q}_i$ を含んでいる場合にも適用できる．このような例が，エネルギー保存則の式が付加条件になった場合である（§ 6）．

に変わったと見なしてもよい．

この数学的方法には，はっきりした物理的対応がある．ラグランジュの関数を変形するだけで付加条件のない変分問題に変わるということは，拘束条件のない新しい力学問題を考えていることに当たる．しかし，このときのポテンシャル・エネルギーは V から $\overline{V}$ に変わっており，このことは外力のポテンシャルの他に拘束力に対するポテンシャルが加わったと解釈することができる．これらの力は，

$$K_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_1 f_1 + \cdots\cdots + \lambda_m f_m)$$

$$= -\left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots\cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right) \tag{58.4}$$

であたえられる．

静力学の条件（第3章 § 5）が，動力学においても同様に有効であることが分かってくる．ここでもラグランジュの未定係数法を用いて拘束力（拘束条件を支えている反作用の力）が求められる．しかし，次の点に注意する必要がある．拘束条件 (58.1) とポテンシャル V は時間に依存していないと仮定する．付加条件を表現する余分な変数を消去してみれば分かるように，この場合の系は保存系である．それゆえ，拘束条件に伴う力のポテンシャルも時間に依存しないとしなければならない．一方，未定係数 $\lambda_i(t)$ は t の関数であるので，反作用力のポテンシャル

$$V_0 = \lambda_1 f_1 + \cdots\cdots + \lambda_m f_m \tag{58.5}$$

は t の関数になる．この見かけ上の矛盾は，反作用力のポテンシャルはC点の軌道に沿って求められているところにある．もっと詳しく分析すればこの矛盾は解消され，未定係数に関して興味深い物理的説明を加えることができる．

拘束条件が何個かある場合に一般化することは簡単であるから，拘束条件が

$$f(q_1, \cdots\cdots, q_n) = 0 \tag{58.6}$$

であたえられた場合を考えてみよう．条件 (58.6) の力のポテンシャルは

$$V_1 = \phi(f) \tag{58.7}$$

であたえられると仮定する．［この仮定については少し注釈を加えなければならない．条件 (58.6) は同じことを表現するのに別の形式

$$gf = 0 \tag{58.8}$$

を用いることもできるので，(58.6) 式は不十分な表現であるといえる．ここで g は座標の任意の関数であり，$f = 0$ としてもゼロにならない関数とする．したがって，(58.7) 式の関数 ϕ の変数は gf としなければならない．この節の終にある問題 17 を参照せよ］.

拘束力は非常に強い力であるから，(58.6) 式から大きく外れることはできない．したがって，ポテンシャル V_1 は小さな f の値に対してだけ分かればよい．ϕ を $f = 0$ の周りでテーラー展開すると

$$V_1 = \phi'(0)f + \frac{1}{2}\phi''(0)f^2 \tag{58.9}$$

が得られる．定数部分は物理的意味を持たないのでゼロとし，3 次以上の項は無視した．

拘束条件 (58.6) が実際に満たされているならば，反作用の力の効果は表にでてくることはない．このことは，$f = 0$ の状態は反作用の力が釣合の状態にあることを示している．さらに，安定な釣合でなければ拘束条件は実現できないと仮定することもできる．したがって，V_1 は $f = 0$ で最小値をとるものでなければならない：

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) > 0 \tag{58.10}$$

ε を正の無限小量として

$$\phi''(0) = 1/\varepsilon \tag{58.11}$$

と置く．ε が十分小さい定数であるということは，拘束条件 (58.6) は非常に強い力で維持されていることを示す．どんな場合でも (58.6) が満たされているためには，無限に強い力（$\varepsilon = 0$）でなければならない．

ε は小さいけれども有限であるから，拘束条件 (58.6) は厳密には満たされていないであろう．このことに伴って，実際の運動には条件

$$f(q_1, \cdots\cdots, q_n) = \varepsilon\rho(t) \tag{58.12}$$

が課されることになる．ここで $\rho(t)$ は時間のみの関数である．ε は無限小であると仮定したから，$f = 0$ は巨視的には満たされても微視的には満たされていないということもできよう．(58.12) 式の右辺の量は拘束条件 $f = 0$ の「微視的誤差」とよぼう．誤差は時間的に変動している．

ポテンシャル・エネルギー

$$V_1 = f^2/2\varepsilon \tag{58.13}$$

から力

$$K_i = -\frac{1}{\varepsilon} f \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{58.14}$$

が求められる．未定係数法を用いて計算すると，

$$K_i = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{58.15}$$

が得られる．この二つを比較して

$$\lambda = f/\varepsilon \tag{58.16}$$

したがって，

$$\lambda = \rho(t) \tag{58.17}$$

が得られる．この結果は，ラグランジュの未定係数は拘束条件 $f=0$ の微視的破れの度合いであることを示している．(58.6) 式の右辺は実際にはゼロではなく $\varepsilon\lambda$ に等しいだけである．ε は拘束条件を維持する力を無限に大きくしたときにゼロに近づく量である．こうして実際の力は保存力であるのに反作用力のポテンシャル V_1 がなぜ見かけ上時間に依存しているかを説明することができる．

すでに示したように，われわれは再度，ホロノームな付加条件は単生的力と同等であるという結論に達した．このことに加えて，スクレロノーミックでホロノームな条件は単生的保存力と同等であるといえる．

《問題 14》 原子間のポテンシャル・エネルギーが

$$V_1 = \frac{A}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)$$

であたえられる2原子分子を考える．r は原子間距離であり，A は定数である．ポテンシャル V の外力が働くときの系の運動は，巨視的には V_1 がないときで付加条件 $r=1$ の場合の運動と同じであることを示せ．

《問題 15》 前問において，ラグランジュの未定係数の $4A$ 倍が拘束条件 $r=1$ の微視的破れに等しいことを示せ．

《問題 16》 質量 m の粒子が半径 $r=1$ の球面上にあるとする．ラグランジュの未

定係数 λ は粒子の圧力による球面の微視的凹凸に比例することを示せ．未定係数 λ（したがって反作用の力）は粒子が球面を離れて自由落下し始める地点でゼロになる．

《問題17》 条件 $f=0$ が普遍的な内容を持つことができなくなることにかかわる一般的な問題を議論する．(*58.7*) 式はもっと一般的な式

$$V_1 = \phi(gf) \tag{58.18}$$

とすべきである．g は未知関数である．未知関数を消去するには，条件 $f=0$ 以外の新しい情報が必要である．われわれは，$f=0$ の曲面は反作用力の等ポテンシャル面であることを知っている．そこで配位空間において第 2 隣接の等ポテンシャル面が得られたとする．この面は，$f=0$ の面の各点で二つの等ポテンシャル面 $\phi=0$ と $\phi=p$ の無限小の距離 ν で特徴づけられる．ここで p は無限小の正数である．このとき，次の関係が得られる：

$$\lambda = \frac{2p}{\nu^2|\mathrm{grad}f|^2}f \tag{58.19}$$

λ はここでも f（すなわち，拘束条件の微視的破れの度合い）に比例している．比例係数は正でなければならないが，一般には定数である必要はない．ここで追加した情報は，未定係数 λ を解釈する上でだけ必要であるにすぎない．反作用力は未知関数 g に依存しないし，ラグランジュの未定係数法でいつでも決められる[2]．

《ま　と　め》 付加条件をラグランジュの未定係数法で扱うことは，拘束条件を維持するに要する力に置き換えて考察するという物理的内容をもつ．未定係数法は，拘束条件による反作用の存在を明らかにする．これらの力は拘束条件の微視的破れによって発現する．未定係数 λ は，この破れの度合いと解釈される．この破れは時間的に変動しており，拘束条件を維持する力が保存的であっても未定係数 λ_i は t の関数になる．

§ 9.　非ホロノームな付加条件と非単生的な力

拘束条件が座標間の代数的関係としては表せないで，(*26.1*) 式のように積分可能でない関係式をとる場合には，消去法を使って余分の変数を消去し次元を

2)　未定係数法の物理的意味についての議論が他の文献にふれられているかを私（著者）は知らない．

下げるという方法は適用できなくなる．しかし，ラグランジュの未定係数法は，このような場合にも適用することができる．(26.1) 式から，ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i} = -(\lambda_1 A_{1k}+\lambda_2 A_{2k}+\cdots\cdots+\lambda_m A_{mk}) \tag{59.1}$$

が得られる．A_{ik} は q_i の関数である．この関数がホロノームな場合の $\partial f_i/\partial x_k$ に対応している．

非ホロノームな拘束力に対する仕事の関数は存在しないが，未定係数法によりこれらの力を考察することができることを利用して上に述べたことの物理的側面が理解できることを示そう．まず，

$$K_i = -(\lambda_1 A_{1i}+\cdots\cdots+\lambda_m A_{mi}) \tag{59.2}$$

と置く．K_i の物理的意味は非ホロノームな拘束力の成分ということである．この力は，今度は単生的でない．すなわち，非ホロノームな付加条件は力学的には非単生的な力と同等である．

こうした同等性があるおかげで，適当に変形すればラグランジュの運動方程式は非単生的な力の場合にも適用できるであろうと予想される．実際にこのことは可能である．非単生的力は，仮想仕事によって特徴付けられる．このときの仮想仕事は，

$$\overline{\delta w} = \rho_1\delta q_1+\cdots\cdots+\rho_n\delta q_n \tag{59.3}$$

であったとする．単生的な力の場合との違いは，この仕事の変分は一つの関数の変分として表すことができないことだけである．単生的外力はみなラグランジュの関数に含まれていると考え，非単生的力は仮想仕事 (59.3) であたえられているとする．そうすれば，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \rho_i \tag{59.4}$$

と書ける．このようにしておけば，(59.1) 式と同様に非単生的力はラグランジュの方程式の右辺に現れることが分かる．

《まとめ》 非ホロノームな付加条件の場合にもラグランジュの未定係数法は使える．この種の条件に由来する力というものをここでも導入する

ことができる．このときの力は，非単生的である．非ホロノームな付加条件と非単生的力はラグランジュの運動方程式では同じ効果を示す．それらは，方程式の「右辺の項」に関係する．

§ 10. 平衡状態のまわりの微小振動

解析力学の威力を最もよく発揮する例の一つが，安定な平衡状態の近傍での微小振動をラグランジュの運動方程式によって解析するときである．この理論は，固体弾性論，格子振動，比熱などの問題にとって重要である．理論的に重要な点は，方法の一般性にある．力学系が簡単なものでも複雑なものも，平衡状態の近傍での運動はどれも同じ形式を使って記述することができる．自由度が大きくなると計算は多少面倒になることはあるが，方法論的側面はどんな系でも変わらない．

振幅が小さいということがこの問題の取扱を簡単にしている．配位空間はユークリッド的ではなくてリーマン幾何学的である．しかもわれわれは，曲がったリーマン空間も微小領域で考えるならば平坦な空間としてよいことも知っている．このことは，線素

$$\overline{ds}^2 = \Sigma a_{ik} dq_i dq_k \qquad (510.1)$$

の性質から分かる．a_{ik} は q_i の関数である．線素は点 P の近傍を問題にする限り定係数の別の線素で置き換えられる．ここで係数 a_{ik} は点 P の近傍に限れば点 P での値で決まる定数で置き換えてもよい．

配位空間で力学系の状態を表す点 P は，平衡状態に対応しているとする．簡単のため点 P は座標系の原点に一致させておこう．このことは位置座標が $q_i = 0$ であることを意味する．以下の議論では，定係数の線素 (510.1) を全領域で用いる．このように近似すれば配位空間はユークリッド的になる．このことによる誤差は，点 P に近付くにつれて小さくなる．

近似された配位空間では，q_i はもはや曲線座標ではなくて直線座標になっているから，解析的性質に関しては 2，3 の公式の知識で十分である．第 1 には，この平坦な空間では微分形式 (510.1) だけでなく，

$$s^2 = \Sigma a_{ik} q_i q_k \tag{510.2}$$

も簡単な幾何学的意味を持っていることである．これで点 P = (0, ……, 0) と点 $Q = (q_1, \cdots\cdots, q_n)$ の距離が決まる．

今度は，n 次元ユークリッド空間の基礎ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{u}_n \tag{510.3}$$

を導入しなければならない．このベクトルは1次独立（すなわち，どのベクトルも他のベクトルの線型結合で表すことができない）であれば，適当に選ぶことができる．配位空間の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = q_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots\cdots + q_n\boldsymbol{u}_n \tag{510.4}$$

と書くことができる．$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}$ の内積は，

$$s^2 = \boldsymbol{R}^2 = \Sigma(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_k) q_i q_k \tag{510.5}$$

である．この式を (510.2) 式と比べると線素の係数が

$$a_{ik} = a_{ki} = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_k \tag{510.6}$$

という中身を持っていることが分かる．特に直交座標系をとれば基礎ベクトルは直交単位ベクトルとすることができる．このときは，

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_k = 0, \qquad (i \neq k)$$
$$\boldsymbol{u}_i^2 = 1 \tag{510.7}$$

であり，距離に関するピタゴラスの定理

$$s^2 = q_1^2 + \cdots\cdots + q_n^2 \tag{510.8}$$

が成り立つ．しかし，特別の単位ベクトルに限定しなければならない理由はどこにもなく，どんな直線座標系を用いてもよい．ユークリッド空間は，2点 P, Q, が一致する場合に限り点 P, Q の距離はゼロにならないということだけを要請しておく．このことは，2次形式 (510.5) は正定値であるということである．このことから，q_i の値をどのように決めようとも s^2 の値は常に正であり，すべての q_i がゼロになる場合に限って $s = 0$ となることを示す．

配位空間では，線素 (510.1) を決めている運動エネルギーは決して負にはならないのでこの条件は満たされる．もしこの値がゼロにあるのは，すべての dq_i はゼロである場合に限られる．このことで，(510.2) の正定値性が保証される．

異なる2点 Q, Q′ を考え，二つのベクトルを導入する：

$$\overline{PQ} = \boldsymbol{R} = q_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots\cdots + q_n\boldsymbol{u}_n \tag{510.9}$$

$$\overline{PQ}' = \boldsymbol{R}' = q_1'\boldsymbol{u}_1 + \cdots\cdots + q_n'\boldsymbol{u}_n \tag{510.10}$$

これらの内積は，

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}' = \Sigma(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_k)q_iq_k' = \Sigma a_{ik}q_iq_k' \tag{510.11}$$

となる．(510.11) 式がゼロになるとき，ベクトル $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}'$ は直交する．

次に，ポテンシャル・エネルギー $V(q_1, \cdots\cdots, q_n)$ の性質を調べてみよう．この関数は原点 $q_i = 0$ のまわりでテーラー展開すると，

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_iq_k + \cdots\cdots \tag{510.12}$$

となる．仮定から原点 P は平衡状態に対応するから，ポテンシャル・エネルギー V は原点で最小値をとる．したがって，(510.12) 式の第 2 項はゼロでなければならない（第 2 章 § 2，第 3 章 § 1 を参照）．定数項はいつでも無視できるから，展開は第 3 項からはじまることになる．q_i は微小量であり高次の項は無視してよい．したがって，

$$V = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}q_iq_k/2 \tag{510.13}$$

となる．ただし，

$$b_{ik} = b_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 \tag{510.14}$$

と置いた．次に，方程式 $V = 1/2$，すなわち，

$$\Sigma b_{ik}q_iq_k = 1 \tag{510.15}$$

について考えてみよう．この方程式は，n 次元の超平面を表している．別のいい方をすれば，2 次の超平面を表すともいえる．3 次元空間での楕円体ないしは双曲面を思い浮かべて次元の数を 3 から n に増やすだけでよい．2 次曲面の解析幾何学の特徴は，任意次元の空間で同一の形式が展開されることである．曲面の理論は，物理数学の多くの分野で重要な柱の一つとなっている．弾性論，音響学，波動力学の数学的基礎は無限次元空間での曲面の解析幾何学を用いて定式化される．

この理論は，力学系の平衡状態のまわりでの振動を論じるとき用いられる．2 次曲面の理論は，座標軸と固体の対称軸と一致させるとき大いに簡単化され

る．例えば，楕円体や双曲面には，直交する3本の「主軸」がある．曲面の方程式が主軸に関係なく書かれているならば，われわれはまず，主軸を求め座標系を回転して新しい座標系を導入しなければならない．物理では，「主軸問題」が非常に重要である．なぜなら，主軸が分かれば問題の大半が解けてしまうことが少なくないからである．

次に，力学系の平衡状態のまわりでの微小振動の問題は，ポテンシャル・エネルギー V の主軸を求める問題にどのように関係しているかを示そう．2次曲面の主軸は，極値的性質を備えている．主軸は，座標原点からの距離が停留値を持つような面上の点を求めることで得られる．したがって，われわれの問題は，

$$s^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \tag{510.16}$$

の停留値を付加条件

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} q_i q_k = 1 \tag{510.17}$$

の下で求めることである．この問題は，代数的問題であるからラグランジュの未定係数法が使える．それには，付加条件 (510.17) を考慮する代わりに

$$\Sigma a_{ik} q_i q_k - (1/\lambda) \Sigma b_{ik} q_i q_k \tag{510.18}$$

を最小にすればよい．ここで，未定係数は $-1/\lambda$ と置いた．この方が以下の計算では便利である．(510.18) を最小にする代わりに，

$$F(q_1, \cdots\cdots, q_n) = \Sigma b_{ik} q_i q_k - \lambda \Sigma a_{ik} q_i q_k \tag{510.19}$$

を最小にしても同じことである．こうすれば，極値問題は次のように解釈することができる：関数

$$2V = \Sigma b_{ik} q_i q_k \tag{510.20}$$

の停留値を付加条件

$$\Sigma a_{ik} q_i q_k = 1 \tag{510.21}$$

の下で求めよ．付加条件 (510.21) は半径1の球面を表す．この球面上のどの点も同じポテンシャル・エネルギーをもつ．ポテンシャル・エネルギー V が停留値をとる単位球面上の特別の点を求めなければならない．

関数 F が停留値を持つ条件は次の1次式で表される；

$$b_{11}q_1+\cdots\cdots+b_{1n}q_n = \lambda(a_{11}q_1+\cdots\cdots+a_{1n}q_n)$$
$$\text{------------------} \qquad (510.22)$$
$$b_{n1}q_n+\cdots\cdots+b_{nn}q_n = \lambda(a_{n1}q_1+\cdots\cdots+a_{nn}q_n)$$

これらは，q_i に関する同次式であり，係数の行列式の値がゼロでないなら自明でない解をもつ．したがって，われわれは「固有値」λ_i を決める「永年方程式」と呼ばれる条件式を得る：

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda a_{11}\cdots\cdots b_{1n}-\lambda a_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{n1}-\lambda a_{n1}\cdots\cdots b_{nn}-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (510.23)$$

この条件式は λ の n 次式であり，n 個の根（ときには，複素根），

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_n \qquad (510.24)$$

を持つ．これらの中には，等しいものがあってもよい．その場合は，「縮退している」という．縮退は係数 a_{ik} あるいは b_{ik} を僅かだけ変えると解くことができる．したがって，重根は考えなくてもよく，根 λ_i は全部異なっていると仮定して進めることにする．

固有値 λ_i の一つ一つに 1 次方程式 (510.22) の一つの解が対応している．この解だけではすべての座標 q_i に共通の因子は決定できないが，共通因子は付加条件 (510.21) から（±の記号を別にして）決定される．固有値 λ_i に属する q_1，……，q_n の値は，単位ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の成分と見なすことができる．このベクトルが曲面 (510.17) の i 番目の主軸である．このようなベクトルは全部で n 個

$$\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{p}_n \qquad (510.25)$$

あり，(510.24) の n 個の固有値に 1 対 1 に対応している．

主軸は，次のような性質を持つ．

1. 永年方程式の固有値 λ_i は座標 q_i の 1 次変換に関して不変である．(510.22) 式に q_1，……，q_n を掛け総和すると，付加条件 (510.21) より

$$\lambda = 2V \qquad (510.26)$$

が得られる．したがって，ポテンシャル・エネルギー V を不変にする座標変換は固有値 λ_i をも不変に保つ．n 個の主軸はポテンシャル・エネルギーが停留値をとる方向であり，固有値はポテンシャル・エネルギーの停留値

$$V_i = \lambda_i/2 \tag{510.27}$$

を決定する．

2. 固有値はみな実数であり，主軸は n 次元ユークリッド空間の n 個の実ベクトルである．n 元の代数方程式の根 λ_i は一般には虚数である．(510.23) 式によると固有値が実数となるのは行列要素 a_{ik} と b_{ik} が対称性

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki} \tag{510.28}$$

を持つ場合である．

この定理の証明は次のとおりである．固有値の一つ（λ_i とする）が虚数であるとする．このとき，(510.22) 式の解 q_k は複素数になるであろう．一方，われわれは，複素関係は i を $-i$ に変えても成立することを知っている．したがって，(510.22) 式は q_k を q_k^* にすると同時に λ_i を λ_i^* に置き換えても成り立つ．ここで星印は，複素共役を意味する．次に，(510.22) 式に q_1^*，……，q_n^* を掛け，(510.22) に共役な式には q_1，……，q_n を掛けておのおの和をとって比較すると

$$(\lambda-\lambda^*)\Sigma a_{ik}q_iq_k^* = 0 \tag{510.29}$$

が得られる．ここで，$q_k = \alpha_k+i\beta_k$（α_k，β_k：実数）と置けば，係数の対称性から (510.29) 式は，

$$(\lambda-\lambda^*)(s_1^2+s_2^2) = 0 \tag{510.30}$$

となる．ここで s_1，s_2 は n 次元ユークリッド空間の距離である．したがって，(510.30) 式から

$$\lambda = \lambda^* \tag{510.31}$$

が得られる．かくして λ は実数であることが結論された．

3. 主軸 p_i は互いに直交しており，直交座標系をなす．2次曲面に関するこの重要な定理は，固有値 λ_i が実数であることを証明するのに用いた (510.29) 式を利用して証明することができる．そのためには，(510.29) 式の解釈をちょっと変えるだけでよい．λ と λ^* は異なる固有値であるとすると，q_i と q_i^* が二つの固有値に属する主軸を決定する．今度は，(510.29) 式の第1因子は仮定からゼロでないので，

$$\Sigma a_{ik}q_iq_k^* = 0 \tag{510.32}$$

が得られる．(510.11) 式によると，これは

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}^* = 0 \tag{510.33}$$

を意味する．主軸 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}^*$ は直交している．このことは，任意の主軸対 $\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{p}_k$ の間で成り立っている．

これらの重要な性質を利用すれば，n 個の主軸を直交座標系の座標軸にとることができる．固有値 λ_i に属する主軸問題の解を

$$\alpha_{1i},\ \alpha_{2i},\ \cdots\cdots,\ \alpha_{ni} \tag{510.34}$$

とする．同様にして解を並べると次の表が得られる：

$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\cdots\cdots$	$\boldsymbol{p}_n$
α_{11}	α_{12}		α_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
α_{n1}	α_{n2}		α_{nn}

次に，1次変換を定義する：

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_{11}u_1+\cdots\cdots+\alpha_{1n}u_n \\ &\text{------------------} \\ q_n &= \alpha_{n1}u_1+\cdots\cdots+\alpha_{nn}u_n \end{aligned} \tag{510.35}$$

ここで u_1，……，u_n は旧い座標系で直交座標の値 q_1，……，q_n をもつ Q の直交座標の値である．この座標系を用いると問題は非常に簡単になる．第1に原点からの点 Q の距離 s はピタゴラスの定理から

$$s^2 = u_1^2+\cdots\cdots+u_n^2 \tag{510.36}$$

であたえられる．こうして，2次形式 (510.2) を対角化することができた．

この座標変換でポテンシャル・エネルギー V はどのように変わったか調べてみよう．第1に，ポテンシャル・エネルギーは新しい座標 u_1，……，u_n の2次関数でなければならない．すなわち，

$$V = \frac{1}{2}\Sigma b'_{ik}u_iu_k \tag{510.37}$$

ここで，b'_{ik} は新しい座標系での係数である．しかし，新しい座標系でも同じように主軸問題を考えることができる．この場合，われわれは

$$\Sigma b'_{ik}u_k = \lambda u_i \tag{510.38}$$

と付加条件

$$u_1^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_n^2 = 1 \tag{510.39}$$

を得る．固有値 λ_i は座標変換の不変量であることを考慮すれば，(510.38) 式の固有値としては先に求めた固有値 λ_1，……，λ_n のどれか一つにつぎつぎと等置することができる．そのうえ新しい座標系では，主軸と座標軸とは一致することはすでに証明した．したがって，ある固有値 λ_i に属する解は

$$u_i = 1,\ \text{その他の}\ u_k = 0 \tag{510.40}$$

でなければならない．この結果を，(510.38) 式に代入して

$$b'_{ii} = \lambda_i, \quad b'_{ik} = 0\ (i \neq k) \tag{510.41}$$

が得られる．このとき，新しい座標系でのポテンシャル・エネルギー V は，

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 u_1{}^2 + \lambda_2 u_2{}^2 + \cdots\cdots + \lambda_n u_n{}^2) \tag{510.42}$$

の形式であたえられよう．距離の2乗のみでなくポテンシャル・エネルギー V も新しい座標系で対角化される．座標変換によって，二つの2次形式が同時に対角形式に変換できたのである．

この座標変換は，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを簡単な表式に変える．新しい座標系から見たときの運動エネルギーは，

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{ds}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(\dot{u}_1{}^2 + \cdots\cdots + \dot{u}_n{}^2) \tag{510.43}$$

と書け，ポテンシャル・エネルギーは，

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 u_1{}^2 + \cdots\cdots + \lambda_n u_n{}^2) \tag{510.44}$$

と書ける．したがって，ラグランジュの運動方程式は，

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_1 + \lambda_1 u_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\ddot{u}_n + \lambda_n u_n = 0 \end{aligned} \tag{510.45}$$

と書かれる．これらの微分方程式は分離型であり，解は容易に得られる．(510.45) 式の一つ一つは調和振動子の運動方程式であり，解は，

$$u_i = A_i \cos\sqrt{\lambda_i}\,t + B_i \sin\sqrt{\lambda_i}\,t \tag{510.46}$$

の形であたえられる．A_i と B_i は任意定数である．

《問題 18》 長さも質量も等しい連結振動子を考える．第1の振動子の下に第2の振

動子が吊されているとする．座標としては垂線と振動子のなす角度 θ_1, θ_2 を用いることにする．

1. 系の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを求めよ．
2. 線素を求め，斜交座標系の座標軸 $\boldsymbol{Q}_1$ と $\boldsymbol{Q}_2$ のなす角は 45 度であることを示せ．
3. 主軸 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は $\boldsymbol{Q}_1$ と $\boldsymbol{Q}_2$ のなす角とその補角を 2 等分することを示せ．
4. 二つの主軸のまわりでの振動数は
$$\nu_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\nu,\quad \nu_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\nu$$
であたえられることを示せ．ν は各調和振動子の固有振動数である．

ここで二つの可能性を区別して考察を進めなければならない．固有値 λ_i はどれも実数であった．しかしまだそれらが正であることを示していない．一般には幾つかの固有値は正でも，残りは負であることが起り得る．そこで，すべての固有値が正であると仮定する．すると，解 (510.46) は C 点が平衡点 P のまわりで振動していることを示す．系の運動は，振動数

$$\nu_i = \sqrt{\lambda_i} \tag{510.47}$$

の調和振動の重ね合わせとして表される．各調和振動子は，主軸方向で振動している．これらの振動子の運動の重ね合わせは，n 次元空間のリサージュの図で表現される．各振動は，互いに直交しているから「規準振動」と呼ばれる．規準振動の数は力学系の自由度の数に等しい．振動数 ν_i は主軸ごとに異なるので規準振動の「スペクトル」とも呼ばれる．

具体的な例は，固体の場合であり，分子は平衡点のまわりで熱振動のために絶え間なく振動している．この振動は，$3N$ 次元ユークリッド空間の C 点で代表される．N は分子数である．C 点の運動は，互いに直交する軸方向の決まった振動数の調和振動子の運動の重ね合わせと見ることができる．自由度の一つ一つが主軸に対応している．振動のスペクトルは低周波数の音響型振動から遠赤外線領域の振動まで広がっている．振幅と位相の分布は統計的法則で決まっていて絶対温度の関数である．

次に，固有値の一つ（λ_n とする）が負であったと仮定しよう．このとき，

$$\sqrt{-\lambda_n} = \nu_n \tag{510.48}$$

と置くと，ラグランジュの運動方程式の解は

$$u_n = A_n e^{\nu_n t} + B_n e^{-\nu_n t} \tag{510.49}$$

で表される．この解，周期的ではなくて指数的である．p_n 軸方向のごく小さな衝撃でも周期的運動では平衡点からどんどん外れていく運動が励起される．

平衡点のまわりでの微小振動の研究によって，異なる性質の振動を区別しなければならないことが分かってきた．第1のものは，永年方程式の全固有値が正である場合の運動である．この場合には，小さな衝撃に対しては力学系は平衡状態からあまり遠くには離れずその周りで微小振動する．第2の状態は，少なくとも一つの固有値が負になる場合に発生する．この場合には，どんなに小さな衝撃でも力学系は平衡状態から遠のいていき，平衡状態は一度は実現したとしても消滅する運命にあることを意味している．このような平衡状態は不安定な平衡状態と呼ばれる．どの固有値も負でないが何個かがゼロである場合を中立的な平衡状態という．

平衡状態の近傍での力学的振舞いを説明したこれまでの議論を配位空間の巨視的描像と関係させなければならない．いままで用いてきた座標系は，局所的なものであった．すなわち，平衡点での局所的変分 δq_i を表しているだけであった．われわれが論じたポテンシャル・エネルギー V は，テーラー展開で求めた点Pでの局所的変分のようなものである．平衡状態を考えているので級数展開の第1項はゼロであった．したがって，展開は2次の項からはじまり，ポテンシャル・エネルギー V の「2次の変分」(第2章 § 3を参照) が得られる．停留値が最小値であるかどうかを決める2次変分が平衡状態の安定性をも決定する．すべての固有値 λ_i が正であるとすると2次の変分は正定値であり，点Pからどの方向に向かってもポテンシャル・エネルギーは増大するばかりである．ポテンシャル・エネルギー V は点Pで局所的に最小になる．平衡状態が安定であることとポテンシャル・エネルギーが最小値をとることとは同等である．少なくとも一つの固有値が負になると，2次の変分は符号を変え，ポテンシャル・エネルギーの停留値は真の極値ではなくなる．このことに対応して平衡状態は不安定状態になる．

弾性体論では安定性の問題は，きわめて重要である．薄い弾性的構造は負荷を大きくして行くと突然破壊するであろう．座屈とは，負荷がある値に達すると突然に安定な平衡状態から不安定な状態に変わる現象である．座屈の解析的問題では $\delta V = 0$ となる点でのポテンシャル・エネルギーの2次の変分 $\delta^2 V$ の性質を調べなければならない．$\delta^2 V$ の固有値 λ_i を求めその符号から安定か不安定を判定する．固有値の中の最小のものが正であれば，安定であり，負なら不安定である．臨界負荷

は，最小の固有値がゼロになるときの値で決まる．

2次の変分の固有値を求めることが困難であることがしばしば起こるので，別の解法を用いなければならないことがある．例えば，$\delta^2 V$ を最小にした上でその符号を調べる．もし正であったなら，安定な平衡状態が実現し，負であるなら不安定である．座屈の条件は，$\delta^2 V = 0$ から求められる．

《まとめ》 力学系の安定な平衡状態の近傍での運動は，配位空間で記述すると便利である．この空間はユークリッド的であり，座標 q_i がこの空間の直線座標である．ポテンシャル・エネルギーの主軸は，配位空間での n 個の方向に向いており，座標軸にとることができる．C 点はこれらの軸方向で調和振動をしている．振動数は，軸ごとに異なっている．この振動は，規準振動と呼ばれ，振幅と位相は初期条件によって任意に選ぶことができる．力学系の任意の運動は規準振動の重ね合わせで表現され，配位空間での C 点の運動はリサージュの図を描く．安定な平衡状態の条件は，永年方程式のすべての根が正であることである．もしそうでないならば，運動は周期的ではない．

第 6 章 正準方程式

はじめに

最小仕事の原理と Hamilton の原理により力学の問題は変分問題として扱えるようになった．定積分が停留値をとる条件として得られたラグランジュの運動方程式は，解析力学の基本的方程式の一つではあるが，これで完了しているということではない．ラグランジュの関数は速度の 2 次式であるが，Hamilton は力学変数を 2 倍にするならラグランジュの関数が速度に関して 1 次式にすることのできる変数変換を見出した．この変換は，ラグランジュの関数だけに通用する変換ではない．ラグランジュの関数を用いて解くことのできるどのような力学の問題も Hamilton の変数変換により正準方程式と呼ばれる簡単な形式で扱うことができるようになる．変換されたラグランジュの関数に対する運動方程式は正準方程式と呼ばれ，この方法によって n 個の 2 階微分方程式は $2n$ 個の 1 階微分方程式で置き換えられる．その結果は，簡単な方法で解くことのできる形式でありかつ変数に関して対称な構造をしている新しい微分方程式の組が得られ，そのことによって解析力学の新しい分野が開かれることになった．

§ 1. ルジャンドル変換

Legendre（フランス，1752-1833）は，微分方程式の解法にとって重要な変数変換法を見つけた．この変換法は，優れた性質を持っていることから多くの問題に適用されている．力学の問題ではこの方法はラグランジュの微分方程式を数学的取扱の便利な新しい形式に換える．ラグランジュの方程式に適用する前

に，この方法の数学的性質について説明しておこう．

n 個の変数の関数

$$F = F(u_1, \cdots, u_n) \tag{61.1}$$

を考える．変換

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i} \tag{61.2}$$

によって新しい変数の組 $v_1, \cdots, v_n$ を定義しよう．関数 F の2階の偏微分係数の行列式の値（ヘッシアン行列式と呼ばれる）が，ゼロでないならば n 個の変数 v_i は独立である．

新しい関数 G を

$$G = \Sigma u_i v_i - F \tag{61.3}$$

により定義する．u_i を v_i の関数として求めその結果を (61.3) 式に代入する．新しい関数 G は新しい変数 v_i だけの関数

$$G = G(v_1, \cdots, v_n) \tag{61.4}$$

として表される．

次に，変数 v_i の無限小の変分を考えよう．(61.3) と (61.4) 式から

$$\begin{aligned} \delta G &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i \delta v_i + v_i \delta u_i) - \delta F \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[u_i \delta v_i + \left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right] \end{aligned} \tag{61.5}$$

である．G は v_i の関数であるから，u_i の変分は v_i の変分を用いて表しておかなければならない．しかし，変数 u_i は (61.2) 式で定義されているから (61.5) 式の δu_i の係数は自動的にゼロとなることが分かり，u_i の変分を消去する手続きは不用である．したがって，(61.5) 式から

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i} \tag{61.6}$$

が得られる．このことがルジャンドル変換の双対性であり，この変換が双対変換と呼ばれる由縁である．双対性は，次のようになっている：

	旧い系	新しい系
変数：	$u_1, \cdots, u_n$	$v_1, \cdots, v_n$
関数：	$F = F(u_1, \cdots, u_n)$	$G = G(v_1, \cdots, v_n)$

変換則

$$\begin{array}{lll} v_i=\partial F/\partial u_i & (\alpha) & u_i = \partial G/\partial v_i \\ G = \Sigma u_i v_i - F & (\beta) & F = \Sigma v_i u_i - G \\ G = G(v_1, \cdots, v_n) & (\gamma) & F = F(u_1, \cdots, u_n) \end{array} \qquad (61.7)$$

新しい変数は旧い変数に関する旧い関数の偏微分で表されると同様に，旧い変数は新しい変数に関する新しい変数の偏微分であたえられる．

(61.7) 式の変換は完全に対称的である．旧い系とか新しい系といっても左側の量から右側の量に移るというだけのことであり，どちらの系から出発してもかまわない．新旧のどちらの系もこの変換においては区別されていない．

この変換は，次のように拡張することができる．関数 F は二つの変数の組 ($u_1, \cdots, u_n$ と $w_1, \cdots, w_m$) の関数とする：

$$F = F(w_1, \cdots, w_m ; u_1, \cdots, u_n) \qquad (61.8)$$

ここで，w_i と u_i とは独立であるとする．変数 w_i は，パラメータであって上記の変換においてどのような変換もうけないとする．変換された関数Gの方も変数の組 w_i を含んでいるであろう．このため，変数の組 u_i は変換に関して能動的であるといい，w_i の方は受身の変数であると呼ばれる．

(61.5) 式に戻って，v_i と w_i の変分が自由にとれるときの関数 G の変分を求めてみよう．このとき，前に求めたものとは異なる関係式が得られる．(61.2) 式はそのまま成り立っており新しい関係式として

$$\frac{\partial F}{\partial w_i} = -\frac{\partial G}{\partial w_i} \qquad (61.9)$$

が得られる．

《まとめ》 ルジャンドル変換は，ある変数の関数を新しい変数の新しい関数に変換する．新旧の変数は，点変換によって関係づけられている．

この変換は新旧の変数に関して完全に対称的である．また，同じ変換によって新しい変数の関数から旧い変数の関数に戻すこともできる．

§ 2. ラグランジュの関数にルジャンドル変換を適用する場合

変分問題のラグランジュの関数 L は，一般には n 個の位置座標 q_i と速度 q_i および時間の関数である：

$$L=L(q_1, \cdots, q_n\,;\,\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n\,;\,t) \tag{62.1}$$

今度は，変数 q_i を運動に伴う速度ではないと考えてみよう．以下の議論においては $\dot{q}_i$ は q_i とは独立な変数の組と見なすことにする．

まず，$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ だけが能動的な変数であって，他の変数は受身の変数であるとしてルジャンドル変換を考えてみよう．前の例で見れば，$\dot{q}_i$ の組が u_i の組に該当し q_i と t が w_i の組に該当する．この場合，受身の変数の数 m は $n+1$ に等しい．

一般的手続きに従って，ルジャンドル変換を次の三段階に分けて考える．

1．運動量と呼ばれる新しい変数を定義する：

$$p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i \tag{62.2}$$

2．新しい関数を全エネルギーと呼ぶことにして，

$$H = \Sigma p_i\dot{q}_i - L \tag{62.3}$$

と置く．

3．(62.2) 式を $\dot{q}_i$ について解き，新しい関数Hを変数 p_i で表す：

$$H = H(q_1, \cdots, q_n\,;\,p_1, \cdots, p_n\,;\,t) \tag{62.4}$$

H はハミルトンの関数（ハミルトニアン）と呼ばれる．

この変数変換の特徴は，次のようにまとめることができる．

	旧い系	新しい系
関数：	ラグランジュの関数	ハミルトンの関数
変数：	速度	運動量
受身の変数：	位置座標と時間	

変換の双対性は，次のように表される．

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$H = \Sigma p_i\dot{q}_i - L \qquad L = \Sigma p_i\dot{q}_i - H \tag{62.5}$$

$$H = H(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n ; t) \quad L = L(q_1, \cdots, q_n ; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n ; t)$$

上記の手続きでラグランジュの関数からハミルトンの関数が得られたと全く同様にしてハミルトンの関数から出発してラグランジュの関数を求めることもできる．一般論で求めた関係式をこの例にあてはめると，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{62.6}$$

となる．

> 《ま　と　め》 速度 $\dot{q}_i$ を能動的な変数，位置座標 q_i と時間 t を受身の変数の組と見なしてラグランジュの関数にルジャンドル変換を用いることができる．その結果，速度は運動量に，ラグランジュの関数はハミルトンの関数に変換される．

§ 3. ラグランジュの運動方程式の変換

ラグランジュの運動方程式は，位置座標 q_i の2階微分方程式であった．しかし，この方程式は，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{63.1}$$

で定義される運動量を用いると1階微分方程式で表すことができ，ラグランジュの運動方程式は，

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{63.2}$$

と書くことができる．ラグランジュの方程式をこのような簡単な形式に表す目

的で導入された物理量 p_i は「運動量」と呼ばれる．運動量 p_i を用いると n 個の2階微分方程式の組は $2n$ 個の1階微分方程式の組，(63.1) と (63.2)，に置き換えられた．また，p_i を用いるならば1階微分以外の高階微分を用いなくてもよいことになる．ベクトル力学における「運動量は質量×速度に等しい」という定義に従うなら，この方法では「質量×加速度」を「運動量の時間変化の割合」と表現し直したことになっている．

次に，前節のルジャンドル変換を適用してみよう．(63.1) 式は，双対性から，

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{63.3}$$

と書くことができる．(63.1) 式と (63.3) 式は同等である．しかし，この方程式は物理法則ではないことに注意しておこう．(63.1) 式は運動量の定義式にすぎないし，(63.3) 式は運動量を速度の関数として表す代わりに速度を運動量の関数として表しただけである．

ラグランジュの運動方程式は，(63.2) 式で表されていた．ルジャンドル変換を用いるとこれらの方程式は，

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{63.4}$$

と書き換えられる．以上のことから，ラグランジュの運動方程式はハミルトンの「正準方程式」と呼ばれている新しい微分方程式の組

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{63.5}$$

に置き換えられる．これらの方程式は，ラグランジュの運動方程式と全く同等であり，数学的書き換えにすぎない．しかし，新しい方程式の組の方は旧い方程式の組よりも優れている面がある．ハミルトンの関数は，q_i と p_i の時間微分を含まないから時間微分は方程式の左辺にしか現れていない．

ここに示した方程式の組は力学系の摂動論を展開した Lagrange の1809年の論文で初めて提案されたものである．しかし，Lagrange はそれらの方程式が運動方程式と密接な関係にあることには気付かなかった．それらの方程式の重要性を最初に指摘したのは Cauchy（1831 年の未発表論文）であった．

Hamilton は同様の方程式を力学の基礎に据えた．その意味で，Hamilton の論文は1835年に発表されていたのであったけれども，これらの方程式をハミルトンの正準方程式と呼ばれるのは正当なことである．

《まとめ》 ラグランジュの運動方程式は，2階微分方程式であった．ルジャンドル変換を用いると時間微分と代数的手続きとを別々に扱うことができる．新しく得られる方程式は $2n$ 個の1階微分方程式である．これらは，正準方程式と呼ばれる．

§ 4.　正準積分

(63.5) 式には二つの発端があった．第1の方程式の組は，ルジャンドル変換によるものであり，これは運動量 p_i の間接的な定義の一つと見ることもできる．第2の組は，変分原理から得られる式である．しかし，方程式に表現されている対称性からすると，これらは一つの原理から導けるのではないかと考えられる．以下では，実際にそれは可能であることを示そう．

ルジャンドル変換の双対性を利用するなら，ハミルトンの関数からラグランジュの関数を逆に求めることもできる．実際，L は次のようにして求められる：

$$L = \Sigma p_i \dot{q}_i - H \tag{64.1}$$

今度は，p_i を q_i と $\dot{q}_i$ の関数として表し，p_i をこの表式から消去しなければならない．しかし，よく検討してみるとそのような手続きは不用であることが分かる．

p_i の変分は，作用積分 A の変分とどのような関係にあるかを調べてみよう．(64.1) 式において p_i の変分をとると，

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i \tag{64.2}$$

となることが示せるが，ルジャンドル変換の定義によって δp_i の係数は自動的にゼロとなる．したがって，p_i のどのような変分も L の変分に寄与しない．その結果，δL の時間積分にも寄与しない．このことから，次のような重要な結論

が導かれる．われわれは，最初には，p_i を q_i と $\dot{q}_i$ の関数としたときの作用積分 A の1次の変分がゼロとなることを条件とした．このときは，p_i の変分は q_i の変分に関係してきた．しかし，上に示したように，p_i の変分は作用関数の変分には寄与しないことが分かったからいままでの変分原理の適用範囲を広げて次のように定式化することができる．作用関数は，p_i の任意の変分に関して常に停留値をとる．このことは，p_i の組が独立変数の第2の組と見なされることを意味する．それゆえラグランジュの関数 (64.1) を修正する必要はない．

作用積分を，

$$A = \int_{t_1}^{t_2}[\Sigma p_i\dot{q}_i - H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n; t)]dt \tag{64.3}$$

と定義し，今度は p_i と q_i の任意の変分に関して A が停留値をとることが要請される．新しい変分問題は，$2n$ 個の変数を含んでおり，オイラー・ラグランジュの微分方程式が p_i と q_i に関して求められる．その結果は，次の $2n$ 個の方程式の組である：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &\equiv \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L}{\partial p_i} &\equiv 0 - \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \end{aligned} \tag{64.4}$$

これらの方程式は，作用積分 (64.3) から導かれる正準方程式 (63.5) に他ならない．これでもはや出発点にとったラグランジュの関数も H を定義するために用いたルジャンドル変換もいちいち元に戻って考えなくてもよくなってきた．われわれは元の変分原理と同等であるが新しい変分原理を見つけたのである．ここでは，微分方程式の組立がより簡潔な形式になっている．これらは，2階微分を含まず1階微分だけを含む．時間微分は変数はどれも分離されていて代数的演算と組み合わさったものは含まれていない．

このような簡潔な形式に書くことができたのは新しい作用積分 (64.3) のおかげである．新しい形式を「正準積分」と呼ぶことにする．被積分関数の第2項は，位置座標――ここでは q_i と p_i である――だけの関数であるが，第1項は速度 $\dot{q}_i$ に依存しているから (64.3) 式の被積分関数は「(運動エネルギー)－(ポテンシャル・エネルギー)」の形式をとる．注目すべき点は，正準積分の運

動エネルギーに関係する第2項の形式である．ここでの「運動エネルギー」とは，速度 $\dot{q}_i$ の1次式である[1]．すなわち，

$$p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+\cdots+p_n\dot{q}_n \tag{64.5}$$

であたえられる．

一般化座標 q_k のどれもが対応する p_k にのみ関係している点に注意しておこう．このことから，p_k は「正準共役な運動量」と呼ばれる．変分問題の変数は次のような対に並べることができる：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} \tag{64.6}$$

Hamilton によるラグランジュ方程式の変換は，どのように複雑な方程式であっても実行でき，変数の数を2倍に増やすだけで，あたえられた変分問題は運動エネルギーの部分が簡単な形式を持つ変分問題に換えられる．この変換は，実際に積分を実行する代わりに微分演算と変数消去だけで実行される．

力学の通常の問題のラグランジュの関数は1階以上の高階微分を含まない．変分問題の一般論からすれば，被積分関数が m 階までの微分を含んでいても差し支えはない．このような場合でも正準積分は定義できることから，ハミルトンの正準方程式は任意の微分方程式の組から変換することで得られる変分問題の規準的形式と考えられている．この変換には，微分演算と変数消去だけが必要である[2]．

《**問題 1**》 第2章 § 15の負荷のある弾性棒問題（特に，積分（*215.3*））を考える．まず，運動量 u を

$$u = \partial L/\partial\ddot{y}$$

と定義する．次にハミルトンの方法を使って積分を

$$\int_0^l [u\ddot{y}-\phi(y,\ \dot{y},\ u)]dx$$

1) 古典力学では，運動エネルギーは速度の2次関数である．しかし，この形式は必要不可欠のものではない．正準形式への変換は，どれほど複雑なラグランジュの関数からも実行できる．

2) このことは M. Ostrogradsky（ソ連の数学者）により最初に指摘された．"Memorire sur les equations differentielles relation au probleme des Isoperemetres" (Mem de l'Acod de St. Peters. 1850 vol. 2 p385)

と変形する．ここで部分積分を行って第1項を $-\dot{u}\dot{y}$ の積分に変える．この結果，変分問題は y と u に関する通常のラグランジュ型の問題になる．それゆえ，ハミルトンの形式に書き換えることができる．その結果，4個の変数 y, u, p_1, p_2 の2対の正準方程式が得られる．これらが元の微分方程式（y の4階微分方程式）に代わる方程式である．これらの正準方程式の組は元の微分方程式と同様であることを示せ．

この方法は変数の数が任意の場合にも用いることができ，2階微分方程式を1階微分方程式に変換する方法である．m 階微分を含む問題の場合には，まず $(m-1)$ 階微分を含む方程式に変換する．このことを被積分関数が1階微分しか含まなくなるまで繰り返す．このようにすれば，ハミルトンの方法により被積分関数を正準形式に持って行くことができる．

独立変数 $q_1, \cdots, q_n$ を適当に導入することができれば，多くの微分方程式は，

$$\dot{q}_i = f_i(q_1, \cdots, q_n, t) \tag{64.7}$$

の形式に書き換えられることに注意しておこう．変分原理で得られる微分方程式は，右辺に現れる量はいつでも一つの関数 H を微分することで求められる．関数 H が微分方程式を余すところなく特徴付けているのである．

方程式が対で現れることは，正準方程式の特徴の一つである．しかし，正準共役量 q_k, p_k を複素数

$$\begin{aligned}(q_k+ip_k)/\sqrt{2} &= u_k \\ (q_k-ip_k)/\sqrt{2} &= u^*_k\end{aligned} \tag{64.8}$$

に置き換えれば方程式 (63.5) などは，次の複素方程式

$$\frac{du_k}{idt} = -\frac{\partial H}{\partial u_k^*} \tag{64.9}$$

で置き換えられる．

ルジャンドル変換の双対性のおかげで，ハミルトンの変分問題はいつもラグランジュの変分問題に対応している．このことを再確認するためには，まず方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{64.10}$$

を使って p_i を q_i と $\dot{q}_i$ の関数として表さなければならない．その結果を被積分関数に代入する．このようにすれば，q_i と $\dot{q}_i$ にだけ依存したラグランジュの

関数が得られることは明らかであろう．

> 《ま　と　め》　ハミルトンの正準方程式は，被積分関数が簡単な形式に変換された場合のラグランジュの変分問題の解と見なされる．この変分問題での変数は q_i と p_i であり，どちらの変数の変分も互いに無関係にとることができる．変分問題の被積分関数は標準形
>
> $$\Sigma p_i\dot{q}_i - H(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n ; t)$$
>
> である．

§ 5.　位相空間と位相流体

正準形式の変数は，q_i と p_i である．したがって，新しい変分問題の自由度は $2n$ である．それゆえ，幾何学的描像を描くために $2n$ 次元空間を用いなければならない．今度は，力学系の「状態」はラグランジュ型の力学での位置座標だけでなく運動量も含んでいる．Gibbs（アメリカ，物理学者）はこの空間を qp 空間（位相空間）と名付けた．この空間の点Cが力学系の拡張された「状態」を表す．ラグランジュの方法では，位置座標 q_i の空間を「配位空間」と呼んできた．ハミルトンの方法では，$2n$ 個の変数 q_i と p_i の空間を「位相空間」と呼ぶ．

配位空間の場合は，リーマン幾何学が適用でき便利であったが，新しい位相空間では事情が異なっている．位相空間は計量的構造を持ち合わせていず，便宜上 $2n$ 個のユークリッド空間の直交座標として q_i と p_i の組を導入するだけである．位相空間には計量を導入する必要がないから，ユークリッド空間をとる特別の理由もない．ユークリッド的でない空間を仮定したとしても差し支えない．

位相空間を特徴付けるのに次元の数を２倍にすることは，一見すると複雑にしただけのように見えるかも知れない．しかし，運動を解析的に調べる上で，この新しい方法は非常に優れた方法であることが分かる．利点の一つは，全軌道の幾何学的描像をラグランジュ型の配位空間とハミルトンの位相空間で描いてみれば理解できる．１本の軌道を問題にする限り，C点の軌跡はどちらの空

間でも1本の曲線になることには変わりない．しかし，可能な多数の軌道の中から特定の軌道を取り出して解析することは必要ではあるが大変に煩雑である．多くの力学問題では，ある初期条件をあたえて運動方程式の特別の解だけを論じても満足のいく解答は得られない．われわれは，どのような初期条件にも対応できるような完全解を求めたいのである．

ラグランジュ型の配位空間での軌道の全体は解析がほとんど不可能なほどに複雑に交差した曲線群となっている．配位空間のどの点からもあらゆる方向に任意の初速度で出発する運動が可能である．これらの曲線を整理された方法で分類することは不可能に近い．同じことをハミルトンの運動方程式の作る位相空間で考察してみよう．方程式は今度は2階ではなく1階の微分方程式である．これらの方程式は，C点があたえられるとその点の速度を決定する．位相空間のどの点から出発する運動も可能であるが，1点Pを指定すると運動の軌道は一意的に決まってしまう．このことを解析学の言葉で表現すると次のようになる．q_i と p_i を時間 t と $2n$ 個の運動の恒量の関数として，

$$q_i = f_i(q_1^0, \cdots, q_n^0; p_1^0, \cdots, p_n^0; t)$$

$$p_i = g_i(q_1^0, \cdots, q_n^0; p_1^0, \cdots, p_n^0; t) \tag{65.1}$$

と表すことができれば，正準方程式 (63.5) の完全解が得られたことになる．$2n$ 個の運動の恒量は初期時刻での座標と置いてよい．

$2n$ 個の座標 q_i, p_i を位相空間での独立な次元と見なすと，正準方程式の完全解は交差することにない曲線として描くことができる．実際には，時間の次元をも加えて $(2n+1)$ 次元としなければならないので多少は複雑にならざるを得ない．Cartan はこの$(2n+1)$ 次元空間を「状態空間」と呼んだ．この空間でなら運動の問題を幾何学の言葉で完全に表すことができる．正準方程式の完全解は，$(2n+1)$ 次元空間での無数の曲線の集まりと見なすことができる．曲線は互いに交差することはない．なぜなら，もしどこかで交差したとすると状態空間の同一の点に二つの接線が存在することになり，正準方程式の解の一意性と矛盾するからである．

こうして得られた幾何学的描像と解析的描像は，流体の運動に類似している．通常の3次元流体を思い浮かべてみよう．流体の運動は，二つの方法で記述することができた．粒子像（ラグランジュの見方）をとることもできるし，

場の描像（オイラーの見方）をとることもできる．

第1の描像では，流体粒子の位置座標に着目してそれらを時間 t の関数としてあたえる見方である．すなわち，初期位置を x_0, y_0, z_0 として

$$
\begin{aligned}
x &= f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t)\\
y &= g(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t)\\
z &= h(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t)
\end{aligned}
\tag{65.2}
$$

と表される．一方，第2の描像では，速度の場が時間の関数として，

$$
\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \dot{y} = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \dot{z} = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{65.3}
$$

であたえられるとする見方である．(65.2) 式を解いて，x_0, y_0, z_0 を x, y, z, t の関数として表すこともできる．その結果を (65.3) 式に代入すれば，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ を x, y, z, t の関数として次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u(x,\ y,\ z,\ t)\\
\dot{y} &= v(x,\ y,\ z,\ t)\\
\dot{z} &= w(x,\ y,\ z,\ t)
\end{aligned}
\tag{65.4}
$$

これで任意時刻の任意の点での速度が決定され，流体運動の場を用いた表現が得られた．このようにすれば，粒子像があたえられているとき，微分演算と変数消去の手続きだけで場の描像が得られる．逆に，場の描像から，(65.4) 式を解いて粒子像に戻すこともできる．二つの見方は全く同等である．

位相空間においても同様の流体力学的描像が成り立つ．違いは3次元ではなくて，$2n$ 次元空間であることである．粒子像は，正準方程式を積分したものに対応している．$2n$ 次元の位相流体の振舞いは通常の流体の振舞いに類似している．

《まとめ》 正準方程式の配位空間は $2n$ 次元空間である．すなわち，変分問題の独立変数である n 個の位置座標 q_i と n 個の運動量 p_i で決まる．この $2n$ 次元空間は「位相空間」と呼ばれる．時間 t をも独立変数に加えるならば $(2n+1)$ 次元空間であり，これは「状態空間」と呼ばれる．力学系の運動を幾何学的に捉えて見ると，それは $2n$ 次元空間の流体（位相流体）の運動と同じである．流体の流線が，力学系の一つの運動に対応

する．流体の全体像は，任意の初期条件下での運動方程式の完全解を表す．

§6. 正準方程式の結果としてのエネルギー保存則

流体力学的描像を借りると，正準方程式

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{66.1}$$

は，位相流体の運動に関係して新たな意味を獲得することになる．これの方程式は，位相空間の任意の点の流体粒子の速度を決定する．それゆえ，流体力学で特別な意味を持っていた運動形態は，位相流体においても興味ある運動でもある．

この種の運動の一つが，定常流体の運動である．この場合の流体の速度は時間に依存しない．流体は運動しているので粒子は刻一刻その位置を変えているけれど空間のどこでもそれらの速度は一定である．場の描像では，このことは方程式 (65.4) の右辺は時間に依存していないことを意味する．

位相流体では，同様のことが保存（スクレロノーミック）系に見られる．この種の系では，ラグランジュの関数 L は時間に依存せず，ハミルトンの関数 H も同様である：

$$H = H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n) \tag{66.2}$$

(66.1) 式の右辺も時間に依存していず，保存系に対応する位相流体は定常運動をしていることが直ちに導かれる．

この種の系に対しては，第2の基本的定理，エネルギー保存則が得られる．(66.2) 式を時間に関して微分すると，

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \tag{66.3}$$

が得られる．正準方程式をこの式に代入すると

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{66.4}$$

が導ける．すなわち，

$$H = 一定 = E \tag{66.5}$$

である．この定理は，H に「全エネルギー」という物理的意味をあたえる．もし，L は $T-V$ に等しく，T が速度の 2 次関数でありそのうえ V が速度に無関係であるならば，

$$H = T+V \tag{66.6}$$

となる．相対論ではこの条件は満たされない．しかし，この場合でも H は一般的公式 (62.3)

$$H = \Sigma\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{66.7}$$

で定義され，(66.5) 式で表されるエネルギー保存則は成り立っている．

エネルギー保存則は，位相流体を用いて幾何学的に解釈することができる．方程式

$$H(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n) = E \tag{66.8}$$

は，$2n$ 次元の位相空間での一つの超平面を表す．定数 E が任意に選べるとするならこの種の超平面を無数に思い浮かべることができる．それゆえ，エネルギー保存則はある超平面の 1 点から出発した流体粒子の軌道はどれだけ長く追跡しようともこの超平面上に留まっていることを意味する．

《ま　と　め》　ハミルトンの関数が時間に依存しないならば，力学系は保存系である．位相流体の描像を借りると，この種の系は次の二つの性質を持つ：

1. 位相流体の運動は定常的である．
2. 流体粒子はいつも「等エネルギー面 $H = E$」に留まっている．

§ 7. リュービルの定理

多くの流体は体積変化に対しては強い抵抗を示す．流体のどの部分の体積も変化しない運動をしている流体は「非圧縮性流体」と呼ばれる．流体の非圧縮性は，二とおりの方法で表すことができる．粒子像では，非圧縮性は x, y, z

の x_0, y_0, z_0 による「汎関数行列式」の値が至るところで1に等しいことである．場の描像では，非圧縮性は次のように表される：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (67.1)$$

正準方程式で表現された位相流体は，非圧縮性流体と同じ振舞いを示す．位相流体は，$2n$ 次元の流体であるから，(67.1) 式は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) = 0 \qquad (67.2)$$

と一般化される．

正準方程式 (66.1) は，(67.2) 式が確かに成り立っていることを示している．しかもこのことが，保存系に対してだけでなくどのような力学系でも成り立っている．グリーンの定理（発散量の体積積分を流れの量の表面積分に変換する）は，3次元空間の場合だけでなく n 次元空間でも同様に成り立っている．位相空間の任意の超平面を考えるとき，(67.2) 式は位相流体の全流束は常にゼロであるという定理になる．位相流体は非圧縮性流体のように振舞う．これが，リュービルの定理である (Liouville, 1838)．

リュービルの定理を利用すると，エネルギー保存則の他にもう一つの保存則が得られる．位相空間の任意の体積，

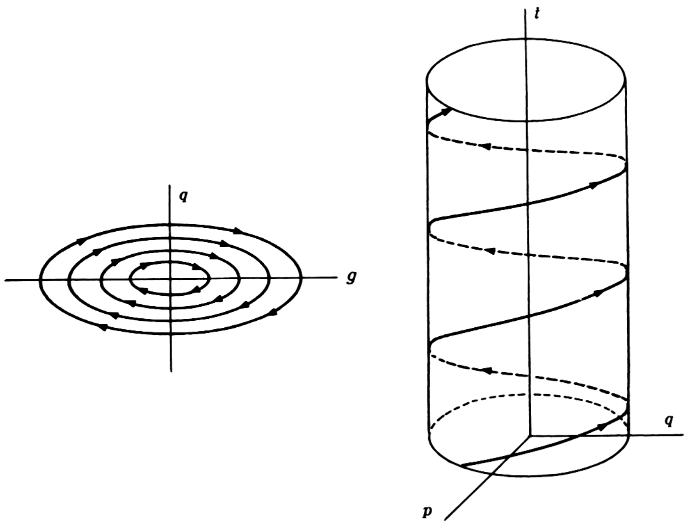
$$\sigma = \int dq_1, \cdots, dq_n \cdot dp_1, \cdots, dp_n \qquad (67.3)$$

を切り取ってみよう．この体積は流体の運動につれてどのような運動をするかを調べてみよう．この領域自体は運動につれて歪んでいくであろうが，位相体積は変化しないこと，すなわち，

$$\sigma = 一定 \qquad (67.4)$$

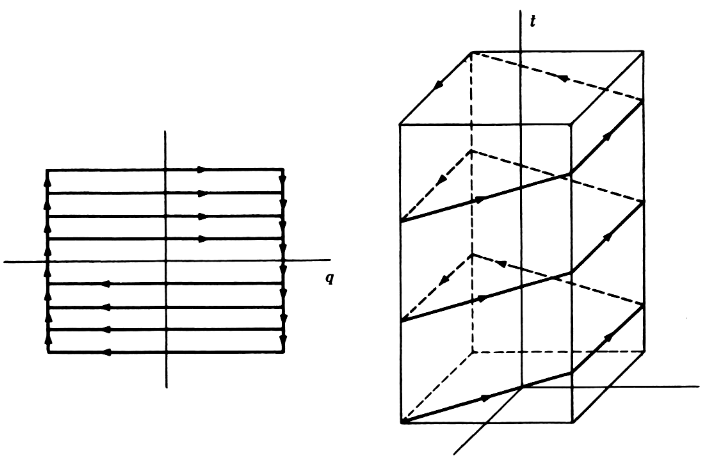
が証明できる．

〈例〉 1自由度の力学系の位相空間は2次元空間であり，状態空間の方は3次元空間となる．したがって，この系に対応する位相流体は，われわれの住んでいる3次元空間での流体によって完全に表現することができる．この系のエネルギー面は曲線に該当し，それらが2次元位相流体の流線に他ならない．さらに，流線は定常的であり流体粒子が流線に沿って流れるときの速度に関係しない．流体は非圧縮性で



(A) 位相空間　　(B) 状態空間

第6図　調和振動子



(A) 位相空間　　(B) 状態空間

第7図　弾性的反射

あるから速度は隣接する流線間の距離から求めることができる．

《問題 2》 155ページの図は，

(1) 調和振動子：　$L = m\dot{q}^2/2 - k^2q^2/2$　(67.5)

(2) 二つの壁の間で弾性的反射を繰り返す粒子

の問題に対する位相空間と状態空間を表している．

図6と図7を解析せよ．第1の問題の流線は楕円であり，第2の問題の場合には長円形をしていることを示せ．

$$v = k^2q^{2m}/2 \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{67.6}$$

とすると，m の値を大きくしていけば楕円は長円に近付いて行くことを示せ．$m = \infty$ で弾性反射をしている粒子の流線が得られる．図6(b)の螺旋形は図7(b)の点線のように変形される．壁の位置は $q = \pm 1$ である．

《ま　と　め》 $2n$ 次元位相空間の位相流体は非圧縮性流体のように運動する．流体中に取った任意の体積は流体の運動に沿って流れ刻一刻と形を変えて行くけれどもその体積は一定に保たれる．

§ 8.　積分不変量：ヘルムホルツの渦定理

Poincare（フランス，数学者）は，位相流体に関する積分で不変に保たれる量を「積分不変量」と名付けた．前節の位相体積はこうした不変量の一つである．他の重要な例は，Helmholtz が導入した「循環」である．

第5章　§3の定理（(53.3) を参照）に戻ろう．この定理は，座標 q_i の任意の変分による作用積分の変分を決定する定理であったが，もしも両端での値がゼロにならないなら，

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \tag{68.1}$$

となることを主張している．p_i の変分を取っても δA は変わらないから，この定理はハミルトン形式においても同じように成り立つ．すなわち，(68.1) 式は q_i と p_i の任意の変分に対して成り立つ．

この定理には，次のような利用例がある．時刻 t_1 に位相空間内で閉じている任意の曲線 L を描いたとしよう．これは，「物質線」（線上の各点にはこの曲線

自体を運んでいく流体粒子が位置している）である．したがって，時刻 t_2 にはこの曲線 L はどこかに移動しているはずである．それも再び閉じた曲線であろう．いま，時刻 t_1 での曲線は方程式

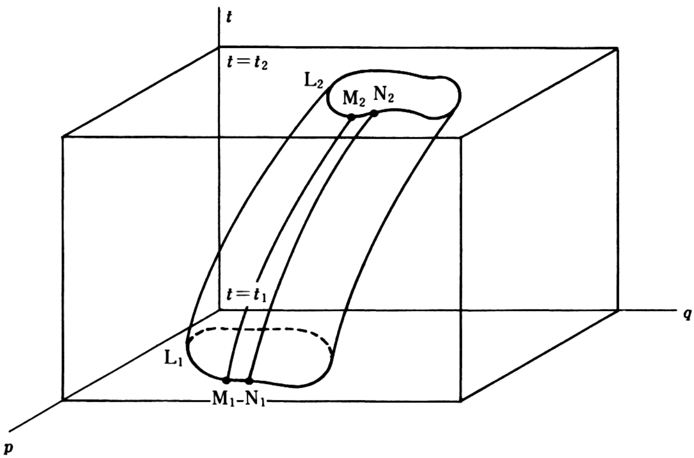
$$q_i = f_i(\tau), \qquad p_i = g_i(\tau) \tag{68.2}$$

で表すことができたとしよう．そこで，閉曲線に沿った積分

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = \oint \Sigma p_i q_i' d\tau \tag{68.3}$$

を考えてみよう．この量は，運動の恒量である：

$$\Gamma = 一定 \tag{68.4}$$



第 8 図

この模様は図 8 に示されている．t_1 と t_2 の位相空間は（$2n+1$）次元の状態空間での切断面と見ることができる．流体が運動するにつれて，点 M_1 は点 M_2 に移動し，近傍の点 N_1 は点 N_2 に移動する．曲線 M_1M_2 は粒子の世界線である．曲線 N_1N_2 の方も世界線である．作用積分は M_1 と M_2 の間のどこでも同じ値 A をとり，N_1 と N_2 の間では $A+dA$ である．曲線 N_1N_2 は曲線 M_1M_2 の変分と見なしてよいので (68.1) 式を用いることができる．それゆえ，

$$dA = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2} \tag{68.5}$$

であることが分かる．この方程式を曲線 L 上の 2 点 τ_1, τ_2 の間で積分すると

$$\Delta A = \left[\int \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2} \tag{68.6}$$

が求められる．ここで積分を L の上で一周する（始点と終点が一致する）ようにとると，$\Delta A = 0$ が得られる．したがって，

$$\left[\oint \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{68.7}$$

である．ここで t_1 も t_2 も全く任意に選ぶことができるから，結局定理 (68.4) を得る．

Helmholtz は，渦定理の応用例を示した．ポテンシャル・エネルギー V の1粒子の運動を考える．この系の位相空間の次元は6である．しかし，定理 (68.4) を利用するだけなら6次元の位相空間を使わなくてもよい．p_1, p_2, p_3 を三つの次元と見なさなくても，配位空間の点（q_1, q_2, q_3）にベクトル（p_1, p_2, p_3）が付随していると考えてもよい．q 座標として直交座標 x, y, z を用いることにしよう．この描像では，通常の3次元空間での閉曲線が得られ，それに沿ってベクトル場（成分は p_1, p_2, p_3）が存在することになる．運動量 $\boldsymbol{p}$ は $m\boldsymbol{v}$ に等しい．$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトルである．したがって，循環は

$$\Gamma = m \oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}$$

であたえられる．ここで，$d\boldsymbol{s}$ は閉曲線の線素ベクトルである．この描像では，6次元の位相空間を用いる必要はなく3次元の配位空間で十分である．

配位空間は一般には実在の物理空間とは何の関係もない．しかし，1粒子の配位空間だけは物理的空間と一致している．この空間のいろいろの経路は，初期条件の異なる粒子の軌道を表している．これらは，「完全流体」の流線と見なすことができる．完全流体とは粘性のない流体（必ずしも非圧縮性流体とは限らない）で温度が一定の流体のことである．粒子には周りの粒子からの力が及んでいるが，オイラーの流体力学方程式はこれらの力はポテンシャルで表される単生的力と同等であることを示している．したがって，ハミルトンの原理が成立するための条件を満たしており，流体の流線は配位空間での流線と同じものである．それゆえ，渦定理を適用することもできる．われわれは次の渦定理を得る：

$$\oint v \cdot ds = \text{一定} \tag{68.9}$$

ここで線積分は完全流体中の任意の閉じた曲線に沿ってとるものとする．もし，時刻 $t = 0$ で循環がゼロであったとすると，後のどの時刻でもゼロのままである．渦なし流体はいつまでも渦なし流体に留まる．すなわち，完全流体では渦は生成もされなければ消滅もしない．

《まとめ》「循環」は，位相流体の運動の恒量である．これは，$\Sigma p_i dq_i$ を位相空間内の任意の閉曲線に沿って積分したものである．位相流体の循環が不変であることは，完全流体のヘルムホルツの渦定理と同じ内容であり，渦の非破壊性を意味する．

§ 9. 循環変数の消去

正準方程式は，ラグランジュの運動方程式よりも簡単な構造をしているとはいえ，一般的解法は見つかっていない．循環変数がこれらの方程式を解く上で特に重要であることを示そう．どれかの力学変数が循環変数であったとすると，解の一部分を求めることができ，元の問題を解きやすい形に変形して考えることができる．この変形を実行する場合には，ハミルトンの形式の方がラグランジュの形式よりも適している．

ラグランジュの関数が q_i のどれか一つ（例えば，q_n）を含まなければ，その変数はハミルトンの関数の方にも現れない．そのときの正準方程式の一つは

$$\dot{p}_n = 0 \tag{69.1}$$

となり，解

$$p_n = \text{一定}(= C_n) \tag{69.2}$$

が得られる．循環変数に共役な運動量は定数であることが分かる．

変数 p_i は，全部が独立変数であるから変分をとる際にいつも条件 (69.1) は成り立っているとして差し支えない．p_n を変化させないから両端を除く区間で変分をとるという制限も変更されない．p_n は一定であるから，ハミルトンの関数において p_n を C_n で置き換えてよい．さらに，作用積分の運動エネルギーに

関係した部分は，

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} p_n \dot{q}_n dt = C_n \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{q}_n dt = C_n [q_n]_{t_1}^{t_2} \tag{69.3}$$

となっていることが分かる．これは，境界項であり定数なので変分を問題にする限り無視できる．したがって，作用積分は

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{q}_i - H \right) dt \tag{69.4}$$

と変形される．同様の議論は，循環変数が何個あっても進められる．

《問題 3》 ハミルトン形式とラグランジュ形式の関係を求め，ハミルトン形式で循環変数を消去することは，ラグランジュ形式での Routh の方法（第5章§4）に当たっていることを示せ．

正準方程式

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial q_m} \tag{69.5}$$

の右辺は時間 t を陽に含んでいるので，変形された力学の問題を解けば循環変数は t の関数として求められる．

《まとめ》 循環変数の消去は，ハミルトン形式では非常に簡単に行える．正準積分の運動エネルギーに関する部分への寄与は除外することができるから，ハミルトンの関数に現れる循環変数に共役な運動量は定数で置き換えられる．

§ 10. 正準方程式のパラメータ表現

状態空間を使えば，正準方程式で記述される力学の問題に幾何学的描像があたえられることを示した．正準方程式の完全解は，この空間での交差することのない無数の曲線群として表現される．

次元数がいつでも奇数であることが，状態空間の特徴の一つである．位置座標 q_i には常に対応する共役運動量 p_i が存在するけれども，時間 t には共役変

数がない．その理由は，時間は力学変数ではなく単に一つの独立変数として導入したからである．しかし，時間の方も力学変数として扱うと便利な場合もある．位置座標 q_i を時間 t の関数と考える代わりに，q_i も t もどちらも力学変数でありパラメータ τ の関数であると考えて見よう．Lagrange は，このような見方では1粒子の配位空間は3次元ではなく4次元であることに注目した．相対論的力学では，時間と空間とは Einstein と Minkowski の4次元空間で統一的に扱われるので，このような扱い方が必然性を持つ．

問題は，ハミルトンの正準方程式をいかに定式化するかである．ラグランジュの形式では，$q_1, \cdots, q_n$ と t が独立変数 τ の関数と見なすことになる．したがって，配位空間は $n+1$ 次元空間であり，t を位置座標の一つに加えなければならない：

$$t = q_{n+1} \tag{610.1}$$

これに伴って，位相空間は（$n+1$）対の正準共役な変数

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ p_t \end{pmatrix}$$

を変数とする（$2n+2$）次元空間となる．ここで，q_{n+1}, p_{n+1} の代わりに t, p_t を用いた．t に共役な運動量 p_t（これは $-\Lambda$ に等しい：(56.2) を参照）も独立変数である．したがって，「状態空間」の次元を一つだけ増やさなければならない．新しい空間を「拡張された位相空間」と呼ぶことにする．パラメータ形式での元のラグランジュの積分は

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(q_1, \cdots, q_n, q_{n+1}; \frac{q_1'}{q_{n+1}'}, \cdots, \frac{q_n'}{q_{n+1}'}\right) q_{n+1}' d\tau \tag{610.2}$$

（第5章§6節，(56.1) を参照）であたえられる．この場合には，従来の方法がもはや使えない．なぜなら，正準方程式は q_i と p_i を1個の独立変数（ここでは，τ）の関数として決定することを内容としているが，τ がどんな変数であるかはまだ決まっていないからである．τ としてどのような変数を用いることができるのかをはっきりさせておこう．

拡張された問題では，ハミルトンの関数 H_1 は常にゼロである．このことは，次のラグランジュの関数 L_1

$$L_1 = L\left(q_1, \cdots, q_n, q_{n+1}; \frac{q_1'}{q_{n+1}'}, \cdots, \frac{q_n'}{q_{n+1}'}\right)q_{n+1}' \tag{610.3}$$

を用いて示すことができる．関数 L_1 は，$(n+1)$ 個の変数 q_1', …, q_{n+1}' の 1 次同次式である．したがって，同次式に関するオイラーの定理によって

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial L_1}{\partial q_i'} q_i' = L_1 \tag{610.4}$$

であることが分かり，結局，

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i q_i' - L_1 = 0 \tag{610.5}$$

である．ハミルトン関数がゼロであり，正準積分は完全に対称な形式

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i' d\tau \tag{610.6}$$

で書かれる．ハミルトンの関数がゼロであることはすべての q_i と p_i は定数であることを意味している．しかし，そのようなことは起こり得ないことは明らかであるからハミルトンの関数に代わる量を見つけなければならない．

そのような物理量は確かに存在する．それは，q_i と p_i を関係付ける付加条件の一つである．方程式

$$p_i = \frac{\partial L_1}{\partial q_i'} \tag{610.7}$$

を q_i' について解くことはできない．もし解けたとすると，p_i の幾つかに関係している q_i' の組が得られたことになる．しかしこのことは，すべての q_i' を α 倍しても p_i の表式は変わらないということと矛盾する．方程式 (610.7) が解を持たないということは，p_i は独立変数ではなくそれらの間になんらかの関係式が存在することを意味する（この関係式は，q_i を従属変数として含んでいる．したがって，q_i と p_i の間の関係式として定式化される）．

$q_{n+1}(= t)$ に共役な運動量は

$$p_{n+1} = -H(q_1, \cdots, q_{n+1}; p_1, \cdots, p_{n+1}) \tag{610.8}$$

であたえられる．その結果，変分問題は次のようになる：定積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q_1' + \cdots + p_{n+1} q_{n+1}') d\tau \tag{610.9}$$

が，付加条件

$$p_{n+1}+H = 0 \tag{610.10}$$

の下で停留値を持つようにせよ．

(610.10) 式を (610.9) 式に代入すれば，

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(p_1\dot{q}_1+\cdots+p_n\dot{q}_n-H)dt \tag{610.11}$$

が得られる．ここで，独立変数は τ から t に戻した．しかし，変数 q_{n+1} を特別扱いする必然性はないから，変数の間の関係を最も一般的な形式

$$k(q_1, \cdots, q_{n+1};\ p_1, \cdots, p_{n+1}) = 0 \tag{610.12}$$

と置いた方が便利である．こうしておけば，$2n+2$ 個の正準変数はすべて平等に扱うことができるようになる．

《**問題 4**》 ヤコビの原理における作用積分は

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{2(E-V)}\ \sqrt{\Sigma a_{ik}q_i'q_k'}\ dt$$

である．この被積分関数から定義される運動量 p_i は，関係式

$$\frac{\Sigma b_{ik}p_ip_k}{2(E-V)} = 1$$

を満たすことを示せ．ただし，行列 (b_{ij}) は行列 (a_{ij}) の逆行列である．

パラメータを用いたラグランジュの形式に対応するハミルトンの形式は，結局次のようにまとめられる．正準積分 (610.9) を付加条件 (610.12) の下で停留値を持つようにせよ．付加条件は，ラグランジュの未定係数法で扱うことができる．すなわち，積分を，

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}p_iq_i'-\lambda K\right)d\tau \tag{610.13}$$

と変形すればよい．パラメータ τ は任意に選ぶことのできる量であったことに対応して，未定係数 λ は τ の任意の関数である．この問題では，未定係数は未定のままである．変数 τ として適当なものを選べば，$\lambda = 1$ とすることもできる．したがって，定積分は

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}p_iq_i'-K\right)d\tau \tag{610.14}$$

と書ける．この形式は，正準変数の数が $2n+2$ 個であるという点以外は従来の正準形式と全く同じである．関数 k（(610.12) 式であたえられる）が，ハミルトン関数の役割をしている．k を「拡張されたハミルトンの関数」と呼ぶことにする．

パラメータを用いたときの正準方程式は

$$q_k' = \frac{\partial K}{\partial p_k},\quad p_k' = -\frac{\partial K}{\partial q_k}\quad (k = 1, \cdots, n+1) \tag{610.15}$$

であたえられることになる．特別の例として

$$K = p_{n+1}+H \tag{610.16}$$

である場合を考える．正準方程式は (610.15) から

$$\left.\begin{aligned} q_k' &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ p_k' &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}\right\}\quad (k = 1, \cdots,n) \tag{610.17}$$

$$q_{n+1}' = 1 \tag{610.18}$$

$$p_{n+1}' = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} \tag{610.19}$$

であたえらえる．(610.18) 式は，パラメータ τ は q_{n+1} に等しいことを示す．これは，時間変数 t に他ならない．結局，(610.17) 式は従来の正準方程式と同じ形である．(610.19) 式は，$p_{n+1}(= -H)$ が時間 t とともに変化する（第5章§3）ことを表す法則である．p_{n+1} は独立変数であるから，この方程式も正準方程式の一つに加えておく．

(610.15) 式のように一般的に書かれた正準方程式は，理論を展開する上で非常に便利でありかつ最も整理された正準方程式である．この形式で見ると保存系に新しい光を当てることができる．時間 t も力学変数に仲間入りさせたことからどんな力学系もここでの意味では保存系になっていることに注目しよう．「拡張されたハミルトンの関数」K は独立変数 τ を陽に含まないので拡張された位相空間ではどの系も保存系である．位相流体の運動はこの空間では定常的であり，どの粒子も超平面

$$K = \text{一定} \tag{610.20}$$

上にいつまでも留まっている．したがって，付加条件 $K = 0$ は，q_i と p_i の初期値をこの条件に従って決めておけば，いつでも満たされているようにできる．

保存系に対するオイラーとラグランジュの最小作用の定式化は，パラメータを用いた定式に新しい意味を付与する．この原理は，$T+V = E$ の条件の下で $2T$ の時間積分を最小にすることを要求したものであったことを思い起こそう．配位空間から位相空間に移って，オイラー・ラグランジュの原理を定式化すると次のようになる．積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(p_1q_1'+\cdots+p_nq_n')d\tau \qquad (610.21)$$

を付加条件

$$H-E = 0 \qquad (610.22)$$

の下で極値を持つようにせよ．これを正準方程式 (610.15) を用いて表現すると，

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(p_1q_1'+\cdots+p_nq_n'+p_{n+1}q_{n+1}')d\tau \qquad (610.23)$$

を付加条件

$$K = 0 \qquad (610.24)$$

の下で極値をもつというようになる．この原理は，保存系に適用した場合には，K が $H+p_{n+1}$ と置くことができるから，オイラー・ラグランジュの原理と同等である．変数 $t = q_{n+1}$ は循環変数であるので，運動量 p_{n+1} は定数（$=-E$）と置いてもよい．したがって，(610.23) 式の被積分関数の最後の項は除去しておいてもよい．このことを考慮すれば，この原理は (610.21) 式と (610.23) 式で定式化したものと一致していることが分かる．

パラメータを含む正準方程式は，種々の最小原理の間の関係には深い内容があることを暗示している．正準積分を

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\Sigma p_iq_i'd\tau \qquad (610.25)$$

と書いておくと，原理の違いは付加条件

$$K = 0 \qquad (610.26)$$

の意味付けの違いであることが分かる．

問題4に示しておいたように，ヤコビの原理での付加条件は

$$\frac{\sum_{i=-1}^{n} b_{ik}p_ip_k}{2(E-V)} = 1 \tag{610.27}$$

である．この条件は

$$\frac{1}{2}\Sigma b_{ik}p_ip_k+V = E \tag{610.28}$$

と書くこともできる．このように表現すると，これはオイラー・ラグランジュの原理に現れた付加条件になっていることが分かる．このことから，これらの原理は，同等であることが明らかになる．さらに，付加条件 (610.28) にラグランジュの未定係数法を用い，位相空間から配位空間に戻してみるとハミルトンの原理が再び導かれる．このことで，保存系に対しては，三つの原理は全部同等であることが理解される．パラメータの役割をしている時間 t は，未定係数 λ を 1 としたときの特殊なパラメータ τ と同じである．

付加条件を (610.27) 式であたえておき，未定係数法を用いるとどうなるであろうか．位相空間から配位空間に戻って考えてみると，積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(E-V)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k'd\tau \tag{610.29}$$

が停留値をとるという原理が得られる．これもヤコビの原理であるが今度は $E-V$ に平方根がついていない．それでも，この原理から得られる力学系の軌道は，ヤコビの原理から得られるものと同じである．違いは，独立変数 τ の規格化だけである．ヤコビの原理で用いる τ は任意のパラメータでよかったが，(610.29) 式に現れている τ は，特別の規格化をした変数でなければならない．

《問題 5》 (610.29) に基づく原理は，次の原理と同等である．質量 m_0 は定数として

$$m = m_0(1-\alpha V) \qquad (\alpha：定数)$$

に従って変化する質点を考える．外力が働いていず慣性運動している質点で質量がこのように変動する場合は，ポテンシャル・エネルギー V の下での定質点 m_0 が質

点 m と同じ初期方向にエネルギー $E = 1/\alpha$ で運動しはじめたときの軌道と同じである．同等性は，軌道に関してだけ成立しており運動状態に関しては成立しない．

《ま　と　め》 時間 t を $n+1$ 番目の座標と見なすとき，正準積分はすべての変数に関して対称的になる．正準積分は

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=1}^{n+1} p_i q_i' d\tau$$

と書かれ，この積分が付加条件

$$K(p_i,\ q_i) = 0$$

の下で停留値を持つようにしなければならない．位相空間の次元数は，$2n+2$ であり，この空間での位相流体は定常的である．また，力学系は常に保存系と見なされる．

することができる．パラメータを用いた正準形式は，理論的には多くの利点を持っている．

第 7 章

正準変換

はじめに

運動方程式を正準形式で表現する方法について述べてきた．われわれの目的はこれらの方程式の解を求めてはじめて達成される．しかし，これらを直接求める解法はまだ見つかっていないから，間接的方法を用いなければならない．一般的方法の一つが，座標変換法である．都合のよい座標系を見つけて正準形式のハミルトンの関数をできるだけ簡単なものに変換し，その結果，微分方程式が容易に解けるようしたい．この目的からすると，正準方程式に関係する座標変換の全体を調べておくことが望ましい．「正準変換」を調べておくことは，力学の問題を解く上できわめて有用である．この取扱は，本質的な点でJacobiに負うところが多い．Jacobiは，Hamiltonほどに豊かな着想からではなくそのうえ解くことに主眼を置いていたとはいえ，正準変換を発見したことは輝かしい彼の業績であることに変わりない．正準変換は，現代物理学の発展に重要な寄与をした．Hamilton の研究によりこの理論は一層重要な理論へと発展した．

§ 1. 座標変換の方法

ラグランジュ形式において，もし適当な座標系を選ぶことができたなら運動方程式は容易に解けることはすでに述べた．力学変数の一つが循環変数であったとするとそのことでラグランジュの運動方程式の運動の恒量の一つが求まったことになる．したがって，座標を変換することで循環変数を求められるよう

工夫をこらさなければならない.

ハミルトンの形式においても事情はほとんど同じである．この形式においても正準方程式を解く一般的方法は見つかっていず，座標変換法がいまのところ最も有効な方法である．座標変換法では，ハミルトンの形式の方がラグランジュの形式より幾つかの点で優れていることが分かる．ラグランジュ形式では，ラグランジュの関数 L が重要な役割を担っていた．この関数は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの差としてあたえられた．仮に，ポテンシャル・エネルギーの方を簡単なものにしようとすると運動エネルギーの表式が一層複雑なものになり，運動エネルギーの方を簡単なものにしようとすると今度はポテンシャル・エネルギーの方が複雑なものになることが多い．ポテンシャル・エネルギーと運動エネルギーを同時に簡単にする座標系を見つけることは，はなはだ難しいことである．ハミルトンの形式における基本的関数であるハミルトンの関数 H は力学変数だけを含んでおり，その微分形を含んでいないから非常に都合がよい．この意味で，ハミルトンの関数は，ラグランジュ形式におけるポテンシャル・エネルギーに対置できる．運動エネルギーの方は，$\Sigma p_i\dot{q}_i$ の形式に書かれ，座標変換の問題に関与しない．この量は変換の種類を決定するだけである．したがって，この種の変換を考える限り，ハミルトンの関数 H に注意を払っておけばよい．

座標変換論に見られる，ハミルトンの方程式がラグランジュの方程式よりも優れているもう一つの側面は，変数の数が2倍になっている点である．一見すると座標の数を倍にすることは得策ではないように思われるが，座標変換ではこのことが強みに変わる．変数の数を増やしておくと，それだけ変換の自由度が増え，このことが大きな利点になる．

ラグランジュ形式には，ラグランジュの関数を簡単なものにする一般的で系統的な方法がないことを指摘しておこう．循環変数を捜し当てるのも全くの幸運としかいいようがなく，それらを見つける系統的な方法がないのである．ハミルトン形式の場合には，循環変数を求める系統的方法があり，どんな場合でもハミルトンの関数を簡単で目的にあったものに変形することができる．正準理論の中心となっているこの方法は，方程式を解くという課題を母関数と呼ばれる一つの基本的関数を求めるという問題に置き換える．次章で示すようにこ

の方法は大変に見通しのよい方法であり，正準理論において中心的役割をしている．

座標変換論では，力学問題を直接に解くという視点とは全く異なった立場から問題を考える．この方法では，q_i も p_i も時間 t の関数であるとは見ない．その上で，運動方程式のことはひとまず忘れて q_i も p_i も単に数学的変数であると見なす．これらは，位相空間の点の座標以外の何ものでもなく，運動に関する問題は全く意にかいさないのである．しかし，重要な点は座標変換は正準方程式を不変に保つものでなければならないことである．変換には，正準方程式に現れる微分形式を含んでいてもよい．もし，微分形式が変換に関して不変であるなら正準方程式も不変に保たれる．このようにして，微分形式の不変性によって特徴づけられる座標変換論の問題にたどり着く．正準方程式を不変に保つ変換は，「正準変換」と呼ばれる．変換の一般論は，Jacobi によって完成された．

《ま と め》 正準方程式の理論にとって最も有力な方法が座標変換である．方程式を直接解く代わりに，問題に最も適した座標を捜す．この方法には，比較的広い範囲の変換がある．この変換は正準変換と呼ばれる．

§ 2. ラグランジュの点変換

ラグランジュ形式での位置座標は q_i の組である．運動方程式は，これらの座標の点変換に関して不変である．ハミルトン形式でこれと同じ問題を扱うことはできるが，今度は$2n$ 個の変数 q_i と p_i を考えなければならない．ハミルトン形式の配位空間は，$2n$ 次元の位相空間のことである．それゆえ，位相空間でもあらゆる点変換が可能であるように思われるかも知れない．すなわち，$2n$ 個の座標 q_i, p_i を任意の関数関係にある新しい座標 q_i, p_i に変換する．しかしながら，このことは許されない．なぜなら，正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{72.1}$$

は，特定のラグランジュの問題に対する解答として得られたにすぎないからで

ある．この方程式はラグランジュの関数が正準形式

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \tag{72.2}$$

をとる場合に限って得られたものである．q_i と p_i を $\bar{q}_i$ と $\bar{p}_i$ に移す変換の中にはラグランジュの関数が正準形式でないものに変えてしまい，その結果，正準方程式まで変えてしまう可能性のあるものもある．それゆえ，われわれは運動方程式の正準形式を不変に保つ変換に限定して考えなければならない．この条件を満たしている変分問題は，被積分関数が (71.2) の形式をとる場合である．(72.2) 式を不変に保つ変換は，正準方程式 (72.1) の形を変えない．

最も一般的な正準変換群について考察する前に，特別な場合を説明しておこう．ラグランジュの点変換は，正準変換群の特別なものである．以下の議論では，Whittaker の教科書（解析力学）で用いられている記号を使う．変換後の変数は，Q_i と P_i と書くことにする[1]．

ラグランジュ形式の変数は q_i であるので，点変換は

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(Q_1, \cdots, Q_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= f_n(Q_1, \cdots, Q_n) \end{aligned} \tag{72.3}$$

で定義される．ラグランジュの関数の形から，p_i が微分形式 $\Sigma p_i \delta q_i$ を不変に保つ変換ならば正準方程式も不変であることは確かである．すなわち，変換の条件は

$$\Sigma p_i \delta q_i = \Sigma P_i \delta Q_i \tag{72.4}$$

である．この条件が q_i の無限小の変化に対して満たされていれば，正準積分

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt \right) \tag{72.5}$$

は，

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - H dt \right) \tag{72.6}$$

に変換される．このことは，正準方程式が不変に保たれることを示している．

1) 変換に t が入っている場合には，T の代わりに $\bar{t}$ を用いる．運動エネルギーと混同しないためである．

このことはまた，旧い変数 q_i, p_i の代わりに新しい変数 Q_i, P_i を用いるなら，変換されたハミルトンの関数H' は H と同じであることを示す．すなわち，ハミルトンの関数は，点変換の不変量である．

微分形式 (72.4) の不変性は，正準変換に固有のものではないことは後の方でしだいに分かってくるであろう．こうした条件の変換は，正準変換群の部分群にすぎない．部分群の中でも，変換則 (72.3) は q_i と Q_i の関係を決定するとき p_i も P_i もどちらも関与しない変換群を特徴付けるだけである．不変性の条件 (72.4) から，p_i の変換則が求められる．(72.3) 式から

$$\delta q_i = \frac{\partial f_i}{\partial Q_1}\delta Q_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial Q_n}\delta Q_n \tag{72.7}$$

が得られる．これを (72.4) 式に代入し，δQ_i の係数を比較すれば p_i の変換則を知ることができる．変換 (72.3) の汎関数行列式がゼロでないなら，それらの結果を p_i に関して解くことができる．

このような変換が確かにラグランジュの点変換と同等であることを示さなければならない．変換 (72.3) は，点変換の一つであることは分かる．条件 (72.4) から決まる運動量 p_i の変換則もラグランジュ形式での対応する変換の一つであることを証明しなければならない．

ハミルトン形式での運動量は，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{72.8}$$

であたえられる．このことに対応して，ラグランジュの関数に新しい変数 Q_i を用いると，新しい運動量 P_i は

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \tag{72.9}$$

と定義しなければならない．ラグランジュの関数は，この変換の不変量の一つであるが，問題は p_i とP_i とは「共変な量」であり，ある規則に従って変換される．

仮に，q_i も t も定数であると見なし，ラグランジュの関数は q_i だけの関数であるとしてみよう．このとき，不変性の条件から $\dot{q}_i$ と $\dot{Q}_i$ の変分に関して

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\delta\dot{Q}_i \tag{72.10}$$

が成り立っている．この関係式に (72.8) 式と (72.9) 式を代入すると，

$$\Sigma p_i\delta\dot{q}_i = \Sigma P_i\delta\dot{Q}_i \tag{72.11}$$

が導かれる．一方，(72.3) 式を t で微分すれば

$$\dot{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial Q_1}\dot{Q}_1+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial Q_n}\dot{Q}_n \tag{72.12}$$

が得られる．この式は，$\dot{q}_i$ から $\dot{Q}_i$ への変換は1次変換であることと δq_i と δQ_i の関係を支配する規則とが同じであることを示している．それゆえ，条件 (72.11) は $\delta\dot{q}_i$ と $\delta\dot{Q}_i$ を δq_i とδQ_i で置き換えてもそのまま成り立つ．すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}P_i\delta Q_i \tag{72.13}$$

が成り立つ．しかし，これは，(72.4) 式に他ならない．こうして，ラグランジュの点変換に関する変換則は条件 (72.4) から求められることが分かる．

《問題 1》 1粒子の運動エネルギーを直交座標 x, y, z と極座標 γ, θ, ϕ を用いて表せ．ラグランジュ形式での共役運動量 p_x, p_y, p_z および，$p_\gamma, p_\theta, p_\phi$ を求め，これらの変数の間の関係を求めよ．次に，同じ関係式は，不変性の条件

$$p_x\delta x+p_y\delta y+p_z\delta y = p_\gamma\delta_\gamma+p_\theta\delta\theta+p_\phi\delta\phi$$

からも求められることを示せ．

点変換 (72.3) は，時間を陽には含んでいなかった（スクレロノーミックである）．時間を陽に含む場合への最も自然な拡張は，時間変数を力学変数の加えたパラメータ形式（第6章§10）での（$2n+2$）次元の「拡張された位相空間」で正準方程式を調べる方法である．この空間では，変数 $q_1,\cdots,q_n, t$ を新しい変数 $Q_1, \cdots, Q_n, \bar{t}$ に換える点変換が考えられる．この点変換は当然時間をも含んでいることになる．今度の不変性の条件は

$$\Sigma p_i\delta q_i+pt\delta t = \Sigma P_i\delta Q_i+p_{\bar{t}}\ \delta\bar{t} \tag{72.14}$$

である．ハミルトンの関数 H ではなく拡張されたハミルトンの関数 K が変換の不変量になる．第6章§10に示しておいたように，新しいハミルトンの関数は，

$$K = H + p_t \tag{72.15}$$

と書ける．したがって，K の不変性とは

$$p_t + H = p_{\bar{t}} + H' \tag{72.16}$$

と表現される．H' は変換されたハミルトンの関数である．この式から，

$$H' = H + p_t - p_{\bar{t}} \tag{72.17}$$

が得られる．すなわち，時間に依存した変換の場合には，ハミルトンの関数はもはや不変量ではない．

一般に，動いている座標系を用いる場合の時間に依存した変換に興味がある．このとき時間変数は自分自身に変換され，変換は，

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(Q_1, \cdots, Q_n, t) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_n &= f_n(Q_1, \cdots, Q_n, t) \\ t &= \bar{t} \end{aligned} \tag{72.18}$$

と定義される．この定義を不変性の条件式 (72.14) に代入し，時間に関してだけ変分をとると

$$p_t - p_{\bar{t}} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \tag{72.19}$$

が得られ，(72.17) 式に代入して

$$H' = H - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \tag{72.20}$$

が得られる．H' の方は新しい変数 P_i, Q_i で表さなければならない．そのためには，(72.20) 式の右辺の p_i を P_i の関数として表現しておかなければならない．(72.20) 式の右辺の第 2 項は，P_i の1次式であることから H' には「ジャイロスコープ効果を表す項」が含まれていることが分かる．

《問題 2》 1粒子系を考える．直交座標系 x, y, z から回転系 x', y', z' に座標変換する：

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \\ z &= z' \end{aligned}$$

回転座標系から見たときのハミルトンの関数は，コリオリーの力と見かけ上の中心力に関係した項を含むことを示せ．

《まとめ》 ラグランジュの点変換は正準方程式を不変に保つ．運動量の変換は，微分形式 $\Sigma p_i\delta q_i$ の不変性から求められる．ハミルトンの関数は，変換された座標系が元の座標系に対して静止している場合に限って変換の不変量となる．もしそうでなければ，変換されたハミルトンの関数にはジャイロスコープ項が現れる．

§ 3. マシュー変換とリー変換

前節で微分形式 (72.4) の不変性から正準方程式の不変性が導けることを示した．しかし，微分形式の不変性は，(72.3) のような変換に限られたたものではない．こうした性質をもつ一般的変換（すでに，Jacobi によって知られていた）は，Mathieu（1874年フランス，数学者）によって調べられていた．一般的な変換は，「マシュー変換」と呼ばれている[2]．S. Lie は微分方程式論に出てくる変換を用いた．Lie はそのときの変換を「接触変換」と呼んだ．

Lie は微分形式

$$dz-\Sigma p_i dq_i \tag{73.1}$$

が変換された微分形式

$$dZ-\Sigma P_i dQ_i \tag{73.2}$$

に比例するような変換を接触変換と定義した．z を $n+1$ 番目の変数と見なすと，上の条件は同次形式

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i = \sum_{i=1}^{n+1} P_i dQ_i \tag{73.3}$$

と書くことができ，$n+1$ 次のマシュー変換と同じになる．

旧座標 q_i と新座標 Q_i の関係が運動量変数 p_i を含まない点変換の代わりに座標間の関係に p_i も含まれるように新旧座標変数の関数関係を一般化しよう．必要なことは，不変性の条件

2) E. T. Whittaker, Analytical Dynamics（解析力学），p. 301

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i \tag{73.4}$$

を満たしていることである.

この条件をよく調べてみると，q_i の組と Q_i の組とが完全に独立ではないことが分かってくる．もし独立であったとすると，すべての q_i も Q_i もゼロであるといった無意味な結論しか得られない．少なくとも一つの関数的関係，

$$f(q_1, \cdots, q_n : Q_1, \cdots, Q_n) = 0 \tag{73.5}$$

が存在しなければならない．この関係式には，p_i も P_i も含まれていない．点変換の場合には，この種の関係式が全部で n 個存在する．マシュー変換は q 座標の間の独立な関係式に数 m によって分類される．m の最小値は1であり，最大値は n である $(1 \leqq m \leqq n)$．関数関係は任意にあたえられるから，マシュー変換は不変性の条件 (73.4) に追加される付加条件

$$\begin{aligned} &\Omega_1(q_1, \cdots, q_n ; Q_1, \cdots, Q_n) = 0 \\ &\text{------------------------------} \\ &\Omega_m(q_1, \cdots, q_n ; Q_1, \cdots, Q_n) = 0 \end{aligned} \tag{73.6}$$

によって特徴づけられる．もし $m = n$ なら，最も多くの条件の付いたマシュー変換である．そのときはどの q_i も Q_i の関数としてあたえられ，(73.3) 式が得られる．この変換は，前節の点変換に一致している．

新旧座標間の変換を具体的に実行するためには，座標 q_i のうちの m 個を Q_i と残りの座標 q_k の関数として表さなければならない．その上で，座標 q_i の変分を不変性の条件式 (73.4) に代入しなければならない．しかし，(73.6) 式を変分問題の付加条件と見なしてラグランジュの未定係数法を適用すれば，変数の間の対称性を保存したまま議論できる．こちらの方が明らかに優れている．そうすると新しい不変性の条件は

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \lambda_1 \delta \Omega_1 + \cdots + \lambda_m \delta \Omega_m \tag{73.7}$$

の形式にまとめられ，どの q_i と Q_i の変分も同等に考えることができる．したがって，マシュー変換の公式は

$$p_i = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i}$$

$$P_i = -\left(\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial Q_i} \right) \tag{73.8}$$

となる．これらの方程式と付加条件 (73.6) により，変換は完全に決定される．(73.8) 式から未定係数 λ_i を求めると，新旧座標間の関係式が$2n-m$ 個求められる．m 個の付加条件 (73.6) とこれらの方程式で変換は完全に決まる．適当な方法を用いて，旧座標 q_i, p_i を新座標 Q_i, P_i の関数として（逆も同様）表すことができる．

以下のことは，前節と同様にして証明される．微分形式 $\Sigma p_i \delta q_i$ の不変性は正準方程式の不変性を保証し，ハミルトンの関数 H はこの場合も変換に対して不変である．その上，時間も位置座標 q_i に加えて，パラメータを用いた正準形式で論じることもできる．このようにすれば，マシュー変換の時間に依存した形式が得られる．この変換は，付加条件

$$\begin{aligned} &\Omega_1(q_1, \cdots, q_n ; Q_1, \cdots, Q_n ; t) = 0 \\ &\text{-----------------------------} \\ &\Omega_m(q_1, \cdots, q_n ; Q_1, \cdots, Q_n ; t) = 0 \end{aligned} \tag{73.9}$$

と微分形式の不変性

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i + p_t \delta t = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i + p_{\bar{t}} \, \delta \bar{t} \tag{73.10}$$

によって，特徴づけられる．その結果，(73.8) 式に新たに

$$p_t - p_{\bar{t}} = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t} \tag{73.11}$$

が追加される．拡張された位相空間で考えると拡張されたハミルトンの関数 K はこの変換の不変量の一つであることが分かる．このことは，

$$p_t + H = p_{\bar{t}} + H' \tag{73.12}$$

が成り立つことであり，これから

$$\begin{aligned} H' &= H + p_t - p_{\bar{t}} \\ &= H + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \end{aligned} \tag{73.13}$$

が得られる．このことから，ハミルトンの関数は時間に依存しない変換の場合

には不変量であるけれども時間に依存する変換においてはもはや不変量ではなく新たな量を追加しなければならないことになる．

《問題 3》 $m = n$ で，条件 (73.6) が (72.18) 式であたえられたとする．(73.13) 式を用いてハミルトンの関数の変換された形を求めると，その結果は (73.20) 式と一致することを示せ．

《ま と め》 マシュー変換は，微分形式 $\Sigma p_i\delta q_i$ が変換の不変量であることによって特徴づけられる．このとき，q_i と Q_i の関係を決めるとき p_i を含まない関係式が少なくとも一つ存在しなければならない．マシュー変換は，新旧二つの座標の組の間の関係式の数によって分類される．そうした関係式は，先験的にあたえることができる．関係式の数の最小は1個であり最大 n 個である．最大個数の場合が先に考察した点変換に該当する．点変換はマシュー変換の特殊な部分群を構成している．

§ 4. 一般的な正準変換

正準方程式を不変に保つだけの目的なら，(72.13) 式の不変性は必ずしも必要ではない．正準方程式を不変に保つより広い変換群が存在する．まず，微分形式 (72.13) が次の法則に従って変換されるとしよう：

$$\Sigma p_i\delta q_i = \Sigma P_i\delta Q_i + \delta S \tag{74.1}$$

δS は q_i と Q_i の関数の完全微分である．このとき正準積分は

$$A = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - H dt\right) + \int_{t_1}^{t_2} dS \tag{74.2}$$

に従って変換される．最後の項は境界項であり，両端を除いた区間での変分のみを考えるなら何の効果も持たない．正準積分は変換されるが，そのことによる修正は単に定数を加えることである．したがって，変換前の正準積分の変分がゼロになる条件が，新しい変数での正準積分の変分もゼロになることを保証

する．このことは，変換 (74.1) の下で正準方程式が不変であるということに他ならない．

こうしてわれわれは，正準変換の最も一般的な条件を得ることができる．すなわち，微分形式 $\Sigma p_i \delta q_i$ が不変であるとする代わりに次のことを要請する：

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta q_i - P_i\delta Q_i) = \delta S \tag{74.3}$$

S は q_i と Q_i の関数としてあたえられているとする：

$$S = S(q_1, \cdots, q_n \,;\, Q_1, \cdots, Q_n) \tag{74.4}$$

この関数は正準変換の「母関数」と呼ばれる．S の変分は

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i}\delta Q_i\right) \tag{74.5}$$

である．簡単のため，q_i と Q_i の間には付加条件はないと仮定してこの表式を (74.3) 式に代入する．δq_i と δQ_i の係数をゼロとすると

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} \tag{74.6}$$

が得られる．

(74.6) 式が，一般的な正準変換に対する基本的な式である．旧変数を新変数の関数（ないしは，その逆）として求めることができないところは，正準変換と共通している．新旧の運動量を新旧の位置座標の関数として表す混合表現が得られる．表現を具体的に決定しようとすれば，われわれは位置座標に対する方程式を解いておかなければならない．

正準変換の最も一般的な形式は，変換が母関数 S を用いて定義される場合の他に，マシュー変換の場合のように q_i と Q_i の間の関係が付加条件としてあたえられる場合に現れる．ラグランジュの未定係数法を適用すれば，変換された方程式は今度は

$$p_i = \frac{\partial \overline{S}}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \overline{S}}{\partial Q_i} \tag{74.7}$$

となることが分かる．ここで，母関数 S は，

$$\overline{S} = S + \lambda_1 \Omega_1 + \cdots + \lambda_m \Omega_m \tag{74.8}$$

であたえられる．

ここまでは，時間に依存しない変換だけを論じてきたが，時間依存性をもつ場合も拡大された位相空間を使えば同じように論じることができる．その場合の母関数は，

$$S = S(q_1, \cdots, q_n\ ;\ Q_1, \cdots, Q_n\ ;\ t) \tag{74.9}$$

と書かれ，付加条件は

$$t = \bar{t} \tag{74.10}$$

である．母関数 S を微分形式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i + p_t \delta t - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \delta Q_i + p_{\bar{t}}\, \delta \bar{t} \right) = \delta S \tag{74.11}$$

で定義すると，ふたたび正準変換を特徴付ける方程式 (74.6) が得られる．その際，一つだけ方程式が追加される．それは，

$$p_t - p_{\bar{t}} = \partial S / \partial t \tag{74.12}$$

である．このことを利用すると拡大されたハミルトンの関数 $K = p_t + H$ の不変性から，ハミルトンの関数 H に対する変換則

$$H' = H + p_t - p_{\bar{t}} = H + \partial S / \partial t \tag{74.13}$$

が導かれる．

《問題 4》 (74.13) 式を別の方法を使って導け．時間変数は独立変数のままにして置き，時間をパラメータとする正準変換を考える．そうすると，正準積分の dS と正準変換の定義に現れた δS と同じであると仮定すれば (74.13) 式は導けるであろう．この節で説明した方法では，時間の変分も求めたが，第 2 の方法では時間の変分は考えない．

《ま　と　め》 正準変換の一般的形式は，変換の母関数を持つ形式である．q_i と Q_i の関数であればどのような関数も正準変換の母関数になり得る．母関数として，q_i と Q_i の間に先験的な関係式を定義してもよい．あらかじめ導入できる条件式の数は n 個以下である．正準変換の公式は，変換自体を具体的な形であたえないという特異なものである．新しい変数を旧い変数で表す（あるいは，その逆）のではない入り混じった表現を得る．新旧の運動量変数は，新旧の位置座標で表現される．

§ 5. 双線型微分形式

どの変換理論にも，変換のもとで変化しない基本的量が存在する．こうした量は変換の特性を決定する基本量である．正準変換を定義したとき，すでに正準方程式が不変であるためには微分形式 $\Sigma p_i \delta q_i$ が不変でなければならないことを知った．次いで正準方程式の不変性はもっと一般的な条件の下でも保たれることとを示した．正準変換である必要十分条件は，変換前と変換後の微分形式の差が関数 S の完全微分 dS に等しいことであった．こうしたことから，正準変換の基本的不変量とは一体何なのであろうかという疑問が沸いてくる．

この問題は，位相空間の幾何学的構造に関係している．ラグランジュの配位空間に幾何学的構造を導入することが運動の理論においていかに重宝なものであったかはすでに示した．配位空間では，リーマン型の線素 $\overline{ds}$ の2乗は変数 q_i の2次微分形式であたえられた．この微分形式はラグランジュの点変換の不変量の一つであり，適当な境界条件の下で配位空間の幾何学的構造を決定する無限小の距離に対応する量であった．

ハミルトンの形式のときと同様に，位相空間は存在するのであろうか．配位空間での $\overline{ds^2}$ に代わる不変な微分形式は存在するのであろうか．実のところ，リーマン空間の $\overline{ds^2}$ とは大変異なった形式であるが正準空間にも不変な微分形式が存在する．しかし，それは微分の2次形式であるが二つの変位に関係しており距離という意味を持たない．したがって，位相空間の幾何学は通常の計量空間とは異なっている．この空間の幾何学は，距離概念はなく面積が基本的である幾何学に似ている．正準変換の微分不変量は二つの無限小変位に関して双線型であるから，これを「双線型微分不変量」と呼ぶ．正準変換論はこの不変微分形式を用いて展開される．

微分量

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i = dS \tag{75.1}$$

は単生的な力による仕事によく似ている．仕事は関数の完全微分に等しく，力はその関数から導かれた．力が単生的かどうかは，1粒子に作用させて閉じた任意の経路に沿って一周させてみればよい．このときの仕事が常にゼロであれ

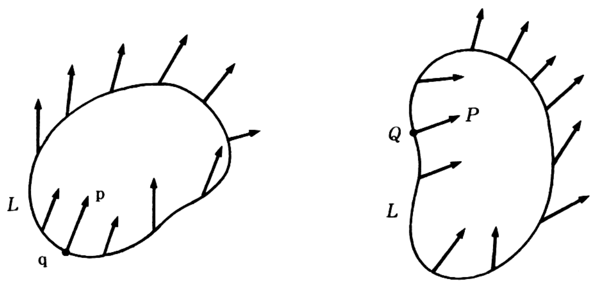
ば，単生的であり，そうでないならば単生的でない．

同じような見分け方は微分形式 (75.1) に対しても利用できる．まず (75.1) 式を位相空間の任意の閉曲線 L に沿って線積分する．そうすれば変換則によってどの点 (q, p) も点 (Q, P) に対応づけられ，左辺からは二つの線積分が求められる．一方，右辺の線積分はゼロである．したがって，未定の関数 S が現れないような不変生の原理

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = \oint \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i \tag{75.2}$$

が得られる．位相空間の任意の閉曲線に対して循環 Γ が定義され，それが正準変換の不変量である．

さて，$2n$ 次元の位相空間で考える代わりに，座標変数 q_i で決まる空間を想定して議論することもできる．この空間では各点に成分が p_i であるベクトルが書き込まれているとする．位相空間の閉曲線はこの空間でも閉曲線であり，この曲線に沿ってベクトル量が連続的に分布している（図 9）．

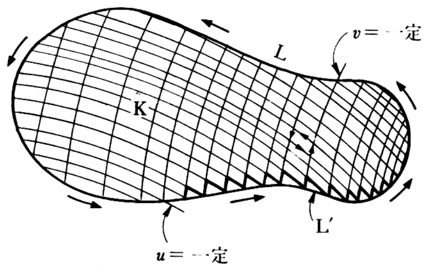


第 9 図

(75.2) 式は積分不変量を用いるときの正準変換を特徴付けるものである．この積分不変量は微分不変量に転化することを示そう．まず，あたえられた閉曲線 L を 2 次元領域 K 内の積分路とする．この領域の各点にはベクトル p_i が書き込まれているとする．この領域は，ガウス型の曲線座標系 u, v を用いて解析的に表すことができる．すなわち，

$$q_i = q_i(u, v), \quad p_i = p_i(u, v) \tag{75.3}$$

u=一定と v=一定の線が稠密な網の目を作る．経路 L を一周する代わりに，パラメータで表された線に沿ってジグザグな曲線 L′ に沿って一周することに



第10図

する．曲線の密度を増やして行けば，曲線 L′ での循環は連続曲線 L に沿って求めた値に近づくであろう．

循環 Γ は二とおりの方法で計算することができる．上で述べたように線積分で求めることもできる．しかし，これとは別に，u＝一定，v＝一定の曲線の作る無数の微小な平行四辺形の辺に沿う積分から求めることもできる．どの辺も一度だけ往復することになるから，閉曲線 Γ 内部の平行四辺形からの寄与は相殺されどの方法を用いても結論は同じである．境界線上からの寄与は変わらない．面積分は，線積分に変わる．

$f(u, v)$ を領域 K で定義れた任意の関数とする．$d'f$ は，u＝一定の条件の下で v の変化による f の変化

$$d'f = \partial f/\partial v\ dv \tag{75.4}$$

とする．$d''f$ は，v＝一定の下での u の変化による f の変化

$$d''f = \partial f/\partial u\ du \tag{75.5}$$

とする．一方，無限小の平行四辺形の周りでの循環は

$$\sum_{i=1}^{n}[d'(p_i d'' q_i) - d''(p_i d' q_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right)dudv \tag{75.6}$$

と書くことができる．こうして面積分を線積分に換える公式

$$\oint_L \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = \int_K \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) du dv \tag{75.7}$$

が得られる．

《問題 5》 3次元の場合に，公式 (75.7) が成り立つことを確かめよ．この公式はストークスの定理であることを示せ．公式 (75.7) は，ストークスの定理を任意の次元に一般化したものである．この公式は，空間の計量的性質に無関係に成り立つことに注意しておこう．

この公式を利用すると，循環 Γ の不変性の新しい表現を見つけることができる．今度は，循環は領域全体にわたっての面積分として表される．領域のとり方は全く任意であったので循環 Γ の不変性は被積分関数

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \tag{75.8}$$

の不変性を意味する．この結果は，微分形式

$$\sum_{i=1}^{n} (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i) \tag{75.9}$$

の不変性でもある．(75.9) 式は，位相空間の二つの無限小変位，$d'q_i$, $d'p_i$ と $d''q_i$, $d''p_i$ に関して常に成り立つ．この式が双線型微分形式と呼ばれる量である．この量が不変であることが，変換が正準変換である必要十分条件である．この条件式には母関数 S が陽に含まれていない．母関数 S を用いた正準変換の定義は，双線型微分形式が正準変換を決定する不変量であるという命題の積分表現と見ることができる．

《まとめ》 正準変換の条件は，母関数を用いなくても定式化できる．位相空間の任意の閉曲線で定義された循環の不変性が，正準変換を特徴付ける．この内容は微分形でも表現することができる．微分型の表現は「双線型微分形式」であり，正準不変量である．双線型微分形式は計量空間の距離 $\overline{ds^2}$ に類似の概念である．しかし，$\overline{ds^2}$ は一つの無限小変位に関係するだけであるが，双線型微分形式の方は二つの無限小変位に関係している．それゆえ，こちらは距離要素というよりも面積要素に近い概念である．

§ 6. ラグランジュの括弧とポアソンの括弧

Lagrange は，正準理論の結論の多くはもっと系統的に導けるに違いないと考えた．彼はすでに摂動理論の研究において特別な役割を持つ量が存在することに注目していた．二つのパラメータ u, v の関数である変数 q_i, p_i を考える．このとき「ラグランジュの括弧」は

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v}-\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right) \tag{76.1}$$

で定義される．この量は，u と v に関して反対称である：

$$[u, v] = -[v, u] \tag{76.2}$$

この括弧記号が，正準変換論で重要な働きをする概念である．

ラグランジュの括弧は，前節で循環を線積分から面積分に書き換えたときに導入した量であることに注意しよう．この記号を用いると，(75.7) 式は

$$\oint_L \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = \int_K [u, v]dudv \tag{76.3}$$

と書くことができる．任意の閉曲線で定義された循環の不変性が正準変換の特徴であったが，同じことはラグランジュの括弧$[u, v]$を使って表すことができる：正準変換は，p_i, q_i が u, v の関数であるとき，ラグランジュの括弧が不変であるような q_i, p_i から Q_i, P_i への変換である．ここでの不変性は，次のような性質である：座標 q_i, p_i を正準変換によって新しい座標 Q_i, P_i に変換したとき新しい座標系でラグランジュの括弧を求めたものは変換前の値に等しい．

母関数 S を使って正準変換を特徴付けることはできるが，変換の方程式を具体的に求めることができないことはすでに述べた．変換の性質を最大限に利用して進め，消去法を使えば最終的方程式を求めることができる．ここで興味ある問題は，次のようなものである：変換が正準変換であるかどうかはいかにして判定されるか．正準変換を具体的に求める一般的方法はまだ見つかっていないが，変換が正準変換であるかどうかを判定することはできる．どの正準変換も微分関係を用いて特徴づけられるから，変換がそうした関係式を満たしているならそれは正準変換である．逆に，正準変換であればそれらの関係式を満たしていなければならない．

こうした微分関係式は，ラグランジュの括弧が正準変換の不変量であるという条件からただちに求めることができる．まず，次の変換を考えてみよう：

$$q_i = f_i(Q_1, \cdots, Q_n ; P_i, \cdots, P_n)$$
$$p_i = g_i(Q_1, \cdots, Q_n ; P_1, \cdots, P_n) \tag{76.4}$$

そこで，Q_i と Q_k か，Q_i と P_k あるいは P_i と P_k の対を取りあげ，残りの変数はすべて定数であると見なしておくと，この対がラグランジュの括弧を定義するパラメータの対 u, v に該当する．これと同じことを変換された座標系でも行うことができる．新しい座標系では，P_i も Q_i も独立変数であるから，定義より

$$[Q_i, Q_k] = 0,\ [P_i, P_k] = 0,\ [Q_i, P_k] = \delta_{ik} \tag{76.5}$$

であることを示せる．ここで，δ_{ik} はクロネッカーのデルタ関数である：$i = k$ のときは，$\delta_{ik} = 1$，$i \neq k$ ならば，$\delta_{ik} = 0$ である．

《問題 6》 座標 q_i, p_i から (76.5) を満たす Q_i, P_i への変換のラグランジュの括弧はどれも不変であることを示せ．この結論は，条件 (75.6) が正準変換であるための必要十分条件であることを意味する．

《問題 7》 (75.6) 式が成り立つときは，双線型微分形式

$$\sum_{i=1}^{n} (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i)$$

が不変量でることを示せ．

Lagrange の研究に続いて，Poisson (1809年) はラグランジュの括弧に対応した別の括弧表示を提案した．座標 q_i, p_i を u, v の関数と見なすかわりに，今度は u と v を q_i と p_i の関数と見る：

$$u = u(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n)$$
$$v = v(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n) \tag{76.6}$$

「ポアソンの括弧」は，

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} \right) \tag{76.7}$$

と定義される．この括弧も反対称的である：

$$(u, v) = -(v, u) \tag{76.8}$$

これらはラグランジュの括弧と密接な関係を持つ．$2n$ 個の q_i と p_i の関数 $u_1, \cdots, u_{2n}$ があたえられているとする．このことから，q_i も p_i も u_k の関数であると見ることもできる．第1の立場からは，ポアソンの括弧が定義され，第2の立場ではラグランジュの括弧が定義される．どちらか一方が，他方を決定する．したがって，ラグランジュの括弧が正準変換の不変量であるならば，ポアソン括弧も不変量になる．こうして正準変換の別の条件が得られる．正準変換は，関数 u, v が座標 q_i, p_i にどのように依存していようとも，ポアソンの括弧 (u, v) が不変である変換のことである．

この不変性の条件を正準変換の逆変換の形式 (76.5) に適用してみよう．新しい座標は旧い座標を用いて

$$Q_i = Q_i(q_1, \cdots, q_n\ ;\ p_1, \cdots, p_n)$$
$$P_i = P_i(q_1, \cdots, q_n\ ;\ p_1, \cdots, p_n) \tag{76.9}$$

のように表せる．u, v として Q_i, P_i の中からどれか二つを選ぶことにし，ポアソンの括弧を求めよう．旧座標系でのポアソンの括弧は前と同様にして計算される．したがって，不変性の原理から

$$(Q_i, Q_k) = 0,\ (P_i, P_k) = 0,\ (Q_i, P_k) = \delta_{ik} \tag{76.10}$$

であることが分かる．これは，(76.5) 式と同等である．

《問題 8》 $u_1, \cdots, u_{2n}$ は，q_i, p_i の関数である．これらを q_i, p_i に関して解きラグランジュの括弧とポアソンの括弧の間には相反関係

$$\sum_{j=1}^{2n} [u_i, u_j](u_k, u_j) = \delta_{ik} \tag{76.11}$$

があることを示せ．この関係式から条件 (76.10) は条件 (76.5) の直接の結果であることが分かる．

《ま と め》 母関数が決まると正準変換も決まる．正準変換の公式が具体的な式で求められるのではないが，変換が正準変換であるかないかを判定することはできる．このために，ラグランジュの括弧かポアソンの括弧を用いることができる．これらの括弧は正準変換に密接に関係している量である．正準変換は，ラグランジュないしポアソンの括弧を不変にする共役変数の変換と定義することができる．

§ 7. 無限小正準変換

条件

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta q_i - P_i\delta Q_i) = \delta S \tag{77.1}$$

で定義される正準変換を考える．次に，変数 Q_i, P_i は，第2の条件

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i\delta Q_i - \overline{p_i}\delta\overline{q_i}) = \delta S' \tag{77.2}$$

を満たす正準変換によって変数 $\overline{q_i}$, $\overline{p_i}$ に変換されたとする．二つの条件式の和をとると，

$$\Sigma(p_i\delta q_i - \overline{p_i}\delta\overline{q_i}) = \delta(S+S') \tag{77.3}$$

が得られる．この結果は，q_i, p_i から $\overline{q_i}$, $\overline{p_i}$ への直接の変換も正準変換であることを示す．このことは，二つの正準変換の積もまた正準変換であることを意味する．すなわち，正準変換は群の性質を持つ．このような群の性質は，リーの微分方程式論において重要な役割を担っている．リーの理論では，微分方程式の完全解を求める問題は変換の連続群を求める問題として扱える．以下で示すように正準運動方程式は連続変換に密接に関係している．

t をパラメータに含む母関数

$$S = S(q_1, \cdots, q_n\ ;\ Q_1, \cdots, Q_n\ ;\ t) \tag{77.4}$$

について考えてみよう．t は時間変数であることが分かってくるが，ここでは，時間 t はまだ一つのパラメータである．

(77.4) 式であたえられる母関数には t の各値に対して一つの正準変換が対応していることから，無限に多くの正準変換が作り出される．そこでパラメータが t であるときの変換 I と $t+\Delta t$ であるときの変換 II を考える．この変換は位相空間の自分自身への変換と見なすこともできる．変換 I は位相空間の点Pを点 Q に写像し，変換 II は，点 P を点 Q' に写像するとしよう．S は t の連続関数であるから点 Q と点 Q' は近接している．正準変換は群の性質を持っているので，点 Q から点 Q' への変換も正準変換である．こうしてわれわれは，位相空間の各点でその点に近接する点に写像される特別のタイプの変換

を得る．したがって，

$$Q_k = q_k + \Delta q_k, \quad P_k = p_k + \Delta p_k \tag{77.5}$$

と置くことができる．ここで Δq_k と Δp_k は無限小の量であり，これらの量の2乗は無視できる．この変換が「無限小正準変換」である．正準変換では一般には変換の公式としてそれらを具体的に書き表すことができなかったが，無限小正準変換では具体的に示せる点が一つの特徴である．

ここでの目的に照らしてみると，旧変数を Q_i, P_i とした方が便利である．新しい変数は，パラメータが t の場合は q_i, p_i であり，$t+\Delta t$ の場合は $q_i+\Delta q_i$, $p_i+\Delta p_i$ と書くとにしよう．この記号を用いると，(77.1) 式と (77.2) 式は，

$$\Sigma(p_i\delta q_i - P_i\delta Q_i) = \delta S$$
$$\Sigma\{(p_i+\Delta p_i)\delta(q_i+\Delta q_i) - P_i\delta Q_i\} = \delta S' \tag{77.6}$$

と書かれる．ただし，

$$\begin{aligned} S' &= S(q_1+\Delta q_1, \cdots, q_n+\Delta q_n; Q_1, \cdots, Q_n, t+\Delta t) \\ &= S + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t}\Delta t \\ &= S + \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t}\Delta t \end{aligned} \tag{77.7}$$

である．したがって，(77.6) の二つの方程式の差を求めると，

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta p_i\delta q_i - \Delta q_i\delta p_i) = \delta\frac{\partial S}{\partial t}\Delta t \tag{77.8}$$

なる関係式がえられる．

議論を先に進めるために，新しい関数を一つ導入する．母関数 S は (77.4) の形であり，t での微分も同じような表式をもつ．そこで，p_i を

$$p_i = \partial S/\partial q_i \tag{77.9}$$

によって定義する．この方程式から Q_i を q_i と p_i の関数として求めることができる．求めた Q_i を $\partial S/\partial t$ に代入し，その結果を $-B$ と置く．すなわち，

$$\partial S/\partial t = -B(q_1, \cdots, q_n : p_1, \cdots, p_n ; t) \tag{77.10}$$

とする．これが求めたい関数である．このように定義された関数を (77.8) 式の右辺に代入して

$$\sum_{i=1}^{n}(\varDelta p_i\delta q_i-\varDelta q_i\delta p_i) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial B}{\partial p_i}\delta p_i\right)\varDelta t \tag{77.11}$$

が得られる．この式の両辺を比較してみると

$$\begin{aligned}\varDelta q_i &= \frac{\partial B}{\partial p_i}\varDelta t\\ \varDelta p_i &= -\frac{\partial B}{\partial q_i}\varDelta t\end{aligned} \tag{77.12}$$

であることが分かる．これが，無限小正準変換の公式である．このようにすれば，新しい座標系として「絶対座標」$q_i+\varDelta q_i$，$p_i+\varDelta p_i$ の代わりに「相対座標」$\varDelta q_i$，$\varDelta p_i$ を用いることができる．これらの座標は変換を特徴付けている関数 B を用いて表すことができ，変数 q_i，p_i の任意の関数とすることができる．

《ま　と　め》 無限小正準変換は，位相空間の点を無限小変位させる．この変換の公式は具体的に求められる．この変換は，変数 q_i, p_i の任意の関数によって特徴づけられる．

§ 8.　正準変換と位相流体の運動

前節の結論は，運動方程式の特性について新しい局面を切り開くのに利用できる．(77.12) 式の両辺を $\varDelta t$ で割り，極限 $\varDelta t\to 0$ をとると，

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial B}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial B}{\partial q_i} \tag{78.1}$$

が得られる．ここで，t を時間変数，B をハミルトンの関数とすれば，(77.1) 式は正準運動方程式に他ならない．この結果の真の意味を理解するために，時間 $\varDelta t$ にわたって位相流体の運動を追跡したとしよう．粒子は識別でき，各粒子の座標は分かっていると仮定しよう．時刻 t で流体のスポット写真をとり，再度 $t+\varDelta t$ でもう一枚のスポット写真をとる．流体粒子は，元の位置から移動して他の位置に移るがこのときの変位は十分に小さいであろう．この無限小変位が位相流体の正準変換を表す．この手続きを何度も繰り返すと，位相流体の運動は連続的に繰り返された正準変換として表現されることが分かる．

この結論——これと少し異なった方法で Hamilton が最初に示した——は，力学系の運動を新しい視点で捉えるとき正準方程式がどのような役割をするかを示してくれる．力学系の運動は変換理論の問題なのである．位相流体の運動は，位相空間自身への連続的に繰り返された写像と見ることができる．この写像は常に正準変換である．

それのみではない．位相流体の変換前後の状態は互いに関連している．前節の最後の方で，t をパラメータに含むどの母関数 S を使ってもハミルトンの関数 $S = H$ を求めることができることを示した．この論法を今度は逆にたどってみよう．運動の問題では，q_i, p_i, t の関数としてハミルトンの関数があたえられる．正準運動量 p_i を $\partial S/\partial q_i$ で書き換え，方程式

$$\partial S/\partial t = -H \tag{78.2}$$

を満たす関数 S を求めよ．これが，逆問題と呼ばれている問題である．前節のような手続きは，微分演算と代数的消去法を用いるだけの簡単なものであった．しかし，その逆は非常に難しい問題である．次の章でもっと詳しく論じることにする．そこで示す結論によると，どのようなハミルトンの関数も母関数 S を持つ．一つのハミルトンの関数が無限個の母関数を持つこともある．母関数 S が

$$S = S(q_1, \cdots, q_n : Q_1, \cdots, Q_n \ ; t) \tag{78.3}$$

の形に求められたとすると，これから無限個の正準変換が作り出せる．点（Q_i, P_i）は点（q_i, p_i）に移される．この点は時間 t とともに連続的に移って行く．この運動が点（Q_i, P_i）を固定しておき t を変化させるときの力学系の運動である．位相流体の運動は，時間に依存する正準変換の連続的継続に他ならない．

この描像では，運動の恒量は新しい別の意味を獲得することになる．すなわち，運動の恒量は正準変換の不変量でもある．第6章§ 8の循環の不変性は正準変換の特徴の一つであった．この不変性がまた正準変換を定義しているのである．リュービルの定理（第6章§ 7）は，位相体積の保存を示しており，これは位相流体の非圧縮性の表現である．この定理は，二つの運動状態を関連付けている変換の関数行列式の値が常に1に等しいということで表すこともできる．これも正準変換の一般的性質の一つである．正準変換のヤコビ行列式の値は常に1に等しい．

《問題 9》 正準変換の関数行列式 Δ を求め，$\Delta^2 = 1$ であることを示せ．$\Delta = -1$ の変換理論には，考察しなければならない課題が多く残されている．しかし，位相流体の場合には $\Delta = 1$ であることが連続の方程式から導ける．

> 《ま　と　め》 時間に依存した母関数は，正準変換の無限個の族を生み出す．この変換の様子は位相空間の自分自身への写像と見ることができ，流体の運動と見ることができる．この運動は正準方程式を満たしている．位相流体は，正準変換の無限個の族の継続して現れる状態と見なすことができる．

§ 9. ハミルトンの主関数と位相流体の運動

前節の結論は，明らかに運動方程式の解法と深くかかわっている．母関数 S とハミルトンの関数 H の関係は，

$$\partial S/\partial t + H = 0 \tag{79.1}$$

であった．ここで，ハミルトンの関数に含まれる運動量 p_i は $\partial S/\partial q_i$ に置き換えられているとする．この方程式を満たす母関数 S が求められたとしよう．そうすれば，母関数を用いて位相流体の運動を時間に依存した正準変換の結果として表せる．必要な微分演算と消去法を用いて変換の具体的形を求めることができる．変換された方程式は，

$$q_i = f_i(Q_1, \cdots, Q_n\ ;\ P_1, \cdots, P_n\ ;\ t)$$
$$p_i = g_i(Q_1, \cdots, Q_n\ ;\ P_1, \cdots, P_n\ ;\ t) \tag{79.2}$$

である．しかし，すべての力学変数は時間 t と初期条件によって決定された $2n$ 個の定数 $Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n$ の関数として表されたので，この結果は完全解の一つである．これらの定数は，点 q_i, p_i に変換される固定点の座標 $Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n$ に他ならない．変換が時間に依存すると変換された点は刻一刻変化することになる．それでも位相流体の運動が具体的に記述されるという点に変わりない．この記述法では，座標 Q_i, P_i が運動の恒量の役割をする．したがって，運動方程式を解く問題は，無限小の正準変換で時間に依存し

た母関数を求める問題に帰着される．母関数が求められたなら，残る問題は簡単な微分演算と消去法を用いて解くことができる．

運動方程式の解を求めるのに，積分の問題を簡単な微分と消去法だけで処理できるようにできる基本的関数を求める問題に帰着させるというアイデアはHamilton のものである．彼は，そのような関数が確かに存在することを幾何光学の場合に証明した．この関数を彼は「特性関数」と呼んだ．これは，多くの問題を解く上で大変有力な方法であった．その後，Hamilton は力学の問題にもその種の関数が存在することに気づき，その関数を「主関数」と名付けた．光学と力学は変分法の視点からは多くの共通性を持っているのでこれら二つの基本的概念は同等である．実際，Hamilton が導いた結論は変分原理にかかわるものであり，変分関数の形は――フェルマー原理における時間やラグランジュの形式における作用関数のように――問題の詳細には無頓着である．

Hamilton は，正準変換論には到達していなかったので，全く別の方法で彼の定理を証明した．ハミルトンの主関数は，変換の具体的表式をあたえる関数ではないが深い物理的内容を持っている．ハミルトンの方法を解説するに当たって，まずラグランジュの関数 L もハミルトンの関数 H も時間 t を陽には含まない力学系を考察してみよう．これは光学で対象とする状況であり，ハミルトンの理論の出発点となった系である．非保存系への一般化は，困難なく行うことができる．すなわち，時間 t を力学変数に加えるならば，どんな系も保存系の問題に帰着できることは先に示した．ラグランジュの形式で最小作用の原理について考察するが，ここでは配位空間ではなく位相空間で進める（第5章§6．参照）．

「作用」

$$A = 2\int_{\tau_1}^{\tau_2} T dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{79.3}$$

を位相空間の C 点は常に等エネルギー面

$$H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n) - E = 0 \tag{79.4}$$

にあるという付加条件の下で極値をとるようにせよ．この原理は，ヤコビの形式でも同様に定式化できることはもちろんである．すなわち，付加条件なしに積分

$$A = \sqrt{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{E-V}\,\overline{ds} \tag{79.5}$$

を最小にすればよい．すでに示したように，リーマンの線素を

$$\overline{d\sigma} = 2(E-V)\overline{ds} \tag{79.6}$$

と定義すれば，ヤコビの原理は次のような簡単な幾何学的内容をもっている：リーマン空間での測地線を求めること．そのような測地線が求められたとしてそれに沿って積分 (79.5) も計算できたとしよう．すなわち，リーマン空間での2点 M, N の間の「距離」が求められた訳である．この距離は明らかに2点 M, N の座標の関数である．二つの端点の座標を用いて表した距離はハミルトンの主関数である．配位空間のどの2点 $\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n}$ と $q_1, \cdots, q_n$ も測地線で結ぶこと（少なくとも，適当に制限された領域内で）ができるので，ハミルトンの主関数は任意の点の間で定義される．主関数を W と書くことにしよう：

$$W = W(q_1, \cdots, q_n\,;\,\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n}) \tag{79.7}$$

定積分 A の変分は両端を除く領域では常にゼロになることはすでに示したが，もし積分の上限と下限でも変分をとることにすれば，A の変分は境界項の形をとる（第6章 § 8，参照）：

$$\delta A = [\Sigma p_i\delta q_i]_{\tau_1}^{\tau_2} = \sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i - \sum_{i=1}^{n}\overline{p_i}\delta\overline{q_i} \tag{79.8}$$

一方，いま導入した関数 W は q_i と $\overline{q_i}$ を用いて表現した定積分 A に他ならない．このことから，

$$\delta A = \delta W = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial W}{\partial \overline{q}_i}\delta\overline{q_i}\right) \tag{79.9}$$

が得られる．(79.8) 式と (79.9) 式から

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \overline{p_i} = -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_i} \tag{79.10}$$

が導かれる．これらは，運動している位相流体の2点は正準変換で結ばれていることを示している．この他に，次のことも分かる．方程式 (79.10) の W の役割から，ハミルトンの主関数は位相流体のある状態から別の状態へ移す正準変換の母関数である．時間に依存する正準変換の母関数 S は，ハミルトンの主関数よりも一般的な関数であることに注意しておこう．なぜなら，一般に時間に

依存する正準変換は位相空間の任意の点 Q_i, P_i を運動している点 q_i, p_i に変換するが，ハミルトンの主関数による変換では初期状態 $\overline{q_i}$, $\overline{p_i}$ を後の時刻の点 q_i, p_iに変換することが許されているだけであるからである．

ここでの考察では座標 q_i, p_i は等エネルギー面 $H = E$ 以外には変換されていない．ここで用いた変数は，等エネルギー面以外の位相空間は存在しないような $(2n-1)$ 次元多様体を構成する（ヤコビの原理に関係して，(610.27) 式は変数 q_i, p_i の満たさなければならない恒等式として導かれたことを思い起こしておこう)．このことからして，主関数 W は，偏微分方程式

$$H\left(q_1, \cdots, q_n ; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)-E = 0 \tag{79.11}$$

をも自動的に満たしていることが分かる．一方，同じことは同じ多様体に属する初期状態 $\overline{q_i}$, $\overline{p_i}$ でも成り立っている．したがって，主関数は p_i を $-\partial W/\partial q_i$ で置き換えて得られる第2の微分方程式

$$H\left(\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n} ; -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_1}, \cdots, -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_n}\right)-E = 0 \tag{79.12}$$

をも満たすことが分かる．すなわち，ハミルトンの主関数はこれらの微分方程式対によって条件づけられているのである．

母関数があたえられれば正準変換の満たすべき方程式は微分演算と消去法だけで求められることになり，座標 q_i, p_i を $\overline{q_i}$, $\overline{p_i}$ の関数として具体的に求めることができる．このことは，配位空間のあたえられた点から出発するC点の軌道を具体的に求めたことに他ならない．これが，ハミルトンの方法の優れた幾何学的内容である．主関数 W さえあたえることができれば，力学の問題は微分演算と簡単な消去法を使って解くことができるようになったのである．

今度は，保存系に対してだけでなく非保存系に対しても同様に成り立つ時間依存性のある場合について考察してみよう．進め方は保存系の場合と全く同じである．すなわち，時間 t を位置座標の中間に加え「拡張された作用」

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq'_i + p_t t'\right)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + p_t dt\right) \tag{79.13}$$

を，付加条件

$$K(q_1, \cdots, q_n, \mathrm{t} ; p_1, \cdots, p_n, p_t) = 0 \tag{79.14}$$

の下で考察すればよい．拡張された位相空間での線素 $\overline{d\sigma}$ は

$$\overline{d\sigma} = Ldt = Lt'd\tau \tag{79.15}$$

と定義する．この線素はもはやリーマン型のものではないであろう．$(n+1)$ 次元空間の 2 点$q_1, \cdots, q_n, t$ と $q_1, \cdots, q_n, t$ を最短の曲線で結んだとすると，この曲線に沿った弧の長さは

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{d\sigma} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} Lt'd\tau \tag{79.16}$$

であたえられる．こうしてわれわれは，2 点に関係した「距離」の具体的な表式を得る．この距離は両端の点の座標の関数

$$W = W(q_1, \cdots, q_n, t\ ;\ \overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n}, \overline{t}) \tag{79.17}$$

である．すなわち，こうしてハミルトンの主関数が求められるのである．前と同様にして変分をとれば，

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \overline{p_i} = -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_i} \\ p_t &= \frac{\partial W}{\partial t}, \quad p_{\bar{t}} = -\frac{\partial W}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \tag{79.18}$$

が得られる．これらも正準変換の性質をもつ．今度は正準方程式が

$$K\left(q_1, \cdots, q_n, t\ ;\ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, \frac{\partial W}{\partial t} \right) = 0 \tag{79.19}$$

となる．$K = p_t+H$ であることを利用すると，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q_1, \cdots, q_n\ ;\ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\ ;\ t \right) = 0 \\ &-\frac{\partial W}{\partial \bar{t}}+H\left(\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n}\ ;\ -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_1}, \cdots, -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_n}\ ;\ \bar{t} \right) = 0 \end{aligned} \tag{79.20}$$

が得られる．これらが W に対する偏微分方程式なのである．

主関数 W がこれらの条件を満たしているから，方程式 (79.18) の 2 行目の二つの方程式ははじめの二つの方程式から導くことができることに注意しておこう．はじめの二つの方程式では，第 2 の組から q_i が求められるからそれを第 1 の組に代入して，

$$q_i = f_i(\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n}\ ;\ \bar{t}, t)$$

$$p_i = g_i(\overline{q_1}, \cdots, \overline{q_n}\ ;\ \bar{t},\ t) \tag{79.21}$$

が得られる．これらの方程式は，$\bar{t}$ での状態があたえられたときの任意の時刻 t での座標 q_i, p_i を具体的に求めた式である．

Hamilton によるこの解法は，Jacobi によってさらに改良された．ハミルトンの主関数はきわめて限定されたものであり，二つの偏微分方程式を同時に満たしていなければならなかった．これを解くことは，ヤコビの方法を用いることなしには不可能である．時間に依存する正準変換の母関数 S は，偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1, \cdots, q_n\ ;\ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\ ;\ t\right)= 0 \tag{79.22}$$

を満たしさえすればいつでも位相流体の運動を描き出す．点Q_1, …, Q_n はエネルギー面 $K = 0$ の上に常に乗っていなければならないことはないので，第2の偏微分方程式は不用になったのである．さらに，母関数 S は q_1, …, q_n, Q_1, …, Q_n, t の関数であるが，ハミルトンの主関数はこれらに加えて変数 $\bar{t}$ をも含んでいる．

(79.22) 式は，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式と呼ばれる．ハミルトンの主関数は確かに基本的重要さをもっているが，それを具体的に求めることははなはだ困難であるからこのような呼び方がされるのである．Hamilton の業績を下に Jacobi は正準変換論を改良してハミルトンの原理をより広範に適用できるようにした．制約の少なくなったヤコビの主関数から，ハミルトンの主関数を求めることもできる．

しかし，二つの偏微分方程式から母関数 W を求めることは一般にはできない．二つの理論の関係については次章で詳しく論じる．

《ま と め》 正準変換の母関数は数学的産物であったが，Hamilton は変分法の解法と密接に関係して主関数と呼ばれるものを導入した．この関数は，明確な幾何学的意味をもつ．これは，計量の定義された空間の2点間の距離に等しく，両端の点の座標の関数である．ハミルトンの主関数は，位相流体の時間の異なる二つの状態を直接に関係付ける正準変換の母関数である．

第 8 章 ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式

履物をぬぎなさい，あなたの立っている所は神聖な場所だから（出エジプト記Ⅲ.5）

はじめに

われわれはいまやほとんど山を昇り詰めたところまできた.われわれは,非常に美しき整った理論の醸し出す澄み切った空気に包まれて山頂近くまできている．われわれは幾何学，光学，そして量子力学の共通の基礎を見ることのできるところまできた．じっくり考えること，新しい創造への熱意なしには，力学の理論（まだ最後まで述べていないが）の見事さを理解することができないかも知れない．この章では，ヤコビの解法からはじめて幾何光学と力学でのハミルトンの理論について解説する．これらの方法を結合すると，de Broglie と Schrodinger の波動力学の発想が導かれ,そこで力学史の長かった旅を終える．

§ 1. 母関数の重要性

正準変換論において，どんな正準変換も一つの母関数 S によって完璧に特徴付けられるという定理が最も重要である．この定理は，正準方程式がただ一つの関数，ハミルトンの関数 H, によって特徴付けられるということに匹敵する．これら二つの関数はお互いに関係付けられることはいうまでもない．運動の問題を解くには，ハミルトンの関数を求め正準方程式を簡単なものにすればよいであろう．そのためには，適当な正準変換を見つけ出せばよい．しかし，考えてみるとこの変換もまた一つの関数に依存しているので，正準方程式を完全に解くことも一つの方程式を解くだけでよいことになる．この方程式は多くの場合には偏微分方程式の形をとるであろう．

実用性の面からは，それほど多くを期待できないかも知れない．たとえ1個の方程式であるとはいえ，偏微分方程式を解くことはたやすいことではない上，ほとんどの場合元の運動方程式を解くことよりも簡単でもない．この偏微分方程式を用いて具体的に解ける問題は，多くの場合他の方法を用いても解けるであろう．こうした事情のために，ハミルトンの方法は長い間実用性に乏しいものと思われ，単に数学的興味しか持たれてこなかった．これらの方法の哲学的価値，力学にきわめて深遠なものを付与する新しい視点などは，ハミルトンの方法の本当の含蓄に気付いたごく少数の科学者を除いてほとんどの人々の注目を集めなかった．これらの科学者に Jacobi を加えなければならない．少し時代を下って，Helmholtz, Lie, Poincare, de Broglie, Schrödinger 等の名前があがってくる．今日の物理学において，ハミルトンの方法はハミルトンの偏微分方程式が示す光学と力学の類似性の重要さによって再評価されるようになってきた．本質的にはハミルトンの方法に基礎をおいた Schrödinger の波動方程式の出現以後は，ハミルトンの方法は物理の教科書でその根本的発想についても解説されるようになった．しかし，哲学的方法論的側面は他に押しやられて，計算技術の面だけが強調されているきらいがある．

われわれの目的からすると，単なる技術上の事柄にではなく，理論の基本的内容と諸概念の間の関連に主として重点を置きたい．ヤコビの方法そして次にハミルトンの方法という順序で解説し，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式が，その後の力学の発展にいかに重要な寄与をしたかについて述べる．

《ま　と　め》 正準変換は一つの母関数で特徴付けられる．運動方程式の解が直接求められるようにハミルトンの関数を変形する正準変換を捜すことは，一つの母関数を見つけ出すことに他ならない．母関数は偏微分方程式の解としてあたえられる．正準運動方程式を解くことは，この偏微分方程式を解く問題に帰着される．

§ 2.　ヤコビの変換理論

時間依存性のないハミルトンの関数を持つ保存力学系について考察する．正

準変換によって力学変数 $q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$ を新しい変数 $Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n$ に変換する．この変換に関しては，新しい変数の一つ（Q_n としよう）がハミルトンの関数に等しくなること，すなわち，

$$Q_n = H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n) \tag{82.1}$$

であること以外には何の条件も付けていない．残りの $(2n-1)$ 個の変数についての変換は，正準変換であるなら全く任意である．

この条件を満たす変換が一つ見つかったとしよう．そうすると，新しい座標系では正準方程式は容易に解くことができるであろう．ハミルトンの関数は正準変換の不変量であるから，新しい座標系から見たハミルトンの関数 H' は Q_n に等しい．この結果が何を意味するかといえば，新しい座標系では力学変数全部が循環変数ということである．したがって，これで運動方程式は解けてしまったことになる．

運動方程式の第1の組

$$\dot{Q}_i = \partial H'/\partial P_i$$

から直ちに

$$Q_i = \alpha_i = \text{定数} \ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{82.2}$$

が得られる．Q_n だけは特別の意味を持つので別個に扱わなければならない．すなわち，Q_n はエネルギーに他ならない：

$$Q_n = E = \text{一定} \tag{82.3}$$

次に，第2の組

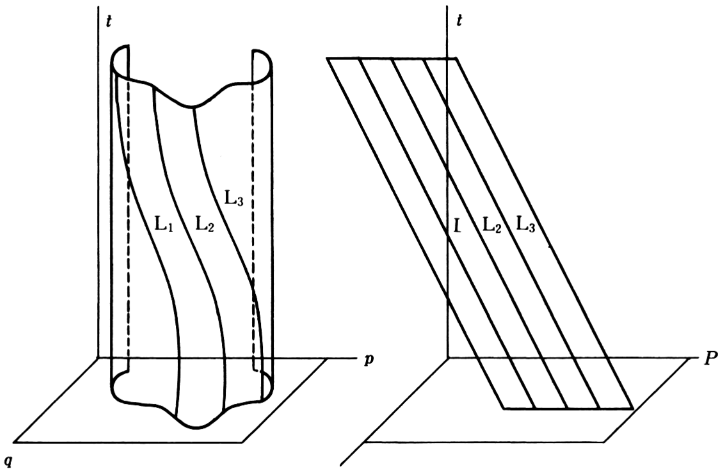
$$\dot{P}_i = -\partial H'/\partial Q_i$$

から

$$P_i = -\beta_i, \ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{82.4}$$

$$P_n = \tau - t \tag{82.5}$$

が得られる．正準方程式の解を幾何学的に見ると次のような意味を持っていることが分かる．位相流体の変換前の世界線は，状態空間を無限個の曲線で埋め尽くしている．正準変換は自己への写像であるが，この写像の結果，世界線は時間軸と45度の角度を持つ無数の平行線群に変換される．この変換で注目されるところは，$H=E$ の円筒状の面を $Q_n=E$ の平坦な平面に移すだけで位相流体の曲がった世界線群が平行な世界線群に移されることである．



第11図

元の力学問題は，条件 (82.1) を満たす正準変換を見つけ出す問題に帰着される．この条件は，新しい変数 Q_i, P_i を用いてハミルトンの関数を表すと Q_n がハミルトンの関数に等しくなるということである．しかし，q_i, p_i を Q_i, P_i を用いて具体的に表現することが可能であるような正準変換を求める一般的方法はまだ知られていないので，問題を具体的に解くことはできない．そこで，中間的な方法について考察することにする．新しい変数 Q_i, P_i を一足飛びに導入する代わりに，座標 q_i は残し，運動量 p_i の方を消去する変換で Q_i をまず導入する．そのことが完了した後に，q_i を消去する．

第1段階は，公式

$$p_i = \partial S/\partial q_i \tag{82.6}$$

を利用して具体的に実行できる．(82.6) 式は，p_i が q_i と Q_i の関数として表されたことを示す．この表式をハミルトンの関数に代入すれば H は q_i, Q_i の関数として表現されたことになる．次に，p_i を消去したハミルトンの関数は，

$$H\left(q_1, \cdots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = Q_n \tag{82.7}$$

になったと仮定しよう．この表式には $\dot{q}_i$ はもはや含まれていない．したがって，第2段階で q_i を消去する手続きは省略することができる．

(82.7) 式は母関数 S に対する偏微分方程式である．この偏微分方程式の適当な解を求めただけではまだ不十分である．母関数であるためには，S は，

$$S = S(q_1, \cdots, q_n ; Q_1, \cdots, Q_n) \tag{82.8}$$

と書けなければならない．(82.7) 式を見ると，Q_n 以外の Q_i は偏微分方程式に陽には含まれていない．それらは，パラメータとして含まれているにすぎない．(82.7) 式を解く目的から見れば，新しい変数 $Q_1, \cdots, Q_{n-1}$ は積分定数であるにすぎない．微分方程式論の教えるところでは，1階偏微分方程式の解で変数と同数の積分定数を持つ解は完全解である．いま考えている力学系の変数の数は n 個であり，完全解は n 個の積分定数を含むものでなければならない．しかし，そのうちの1個は実際には不用である．偏微分方程式には S 自身ではなくて S の偏微分しか含まれていないので，S は定数項を除いて決定される．正準変換ではこの定数項は何の働きもしないから除外してよい．残る $(n-1)$ 個の定数は $Q_1, \cdots, Q_{n-1}$ と同定される．

以上のことから，母関数 S は次の手順で求められる．まず，(82.7) 式の解として積分定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ を伴う完全解

$$S = S(q_1, \cdots, q_n ; \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, Q_n) \tag{82.9}$$

をさがす．次に定数 α_i を変数 Q_i で置き換え，正準方程式の完全解を求める．方程式

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} \tag{82.10}$$

は q_i, p_i から Q_i, P_i への変換を表しているから，適当な方法で

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(Q_1, \cdots, Q_n ; -P_1, \cdots, -P_n) \\ p_i &= g_i(Q_1, \cdots, Q_n ; -P_1, \cdots, -P_n) \end{aligned} \tag{82.11}$$

が得られる．すでに (82.2-5) 式が示すように，新しい座標の値は全部求められている．これらの結果を (82.11) 式に代入すれば，q_i, p_i は

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau - t) \\ p_i &= g_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau - t) \end{aligned} \tag{82.12}$$

の形で求められる．

《問題 1》　1自由度系では偏微分方程式 (82.7) は常微分方程式に変わる．1次元

調和振動子を考える．ポテンシャル・エネルギーは

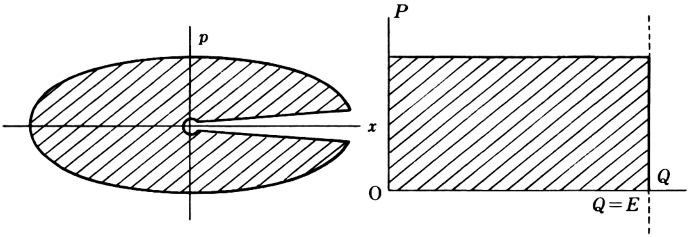
$$V = mk^2x^2/2 \tag{82.13}$$

であたえられる．ハミルトン・ヤコビの編微分方程式を正準変換

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2Q}{m}}\cos kP$$

$$p = \sqrt{2mQ}\sin kP$$

を利用して解け．(x, p) 座標での等エネルギー面（楕円）は新しい座標系では $Q=E$ の直線の集まりに変換される．



第12図

変数対の正準変換は，面積を保存する．この例では，楕円の面積は長方形のどの面積に変換されるか．この見かけ上の矛盾は変換の多価性による．変換の一価性を保証するためには，P の領域を区間 $[0, 2\pi/k]$ に限定しておかなければならない．このことに対応して x 軸の図に示すような切断を入れておかなければならない．その結果，楕円軌道は閉じない軌道に変わる．このことに対応して新しい座標系での軌道は，斜線を施した領域に限定され面積も楕円の面積に等しい．

正準方程式を解く立場からいままでのところを振り返ってみると，変数 Q_i を積分定数で置き換える手続きは不用であることが分かる．最終解答において Q_i は再び定数になっていることに注意しよう．同様に，Q_n をエネルギー E と置いて始めてもよい．以上のことをまとめると次のようになる：

1．　エネルギーの式を次のように表す：

$$H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n) = E \tag{α}$$

2．　p_i を関数 S の偏微分で置き換える；

$$H(q_1, \cdots, q_n; \partial S/\partial q_1, \cdots, \partial S/\partial q_n) = E \tag{β}$$

3．　この方程式の $(n-1)$ 個の積分定数を持つ完全解を求める．

$$S = S(q_1, \cdots, q_n; \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E) \tag{γ}$$

4. 方程式

$$\partial S/\partial \alpha_i = \beta_i, \ \partial S/\partial E = t - \tau \tag{δ}$$

を導入する．

5. これらの方程式を q_i について解いて

$$q_i = f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E; \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, \tau - t) \tag{ε}$$

が得られる．

これらは運動方程式の解である．

次に，以上の結果をエネルギーを保存しない力学系（レオノーミック系）に一般化する．前に示しておいた方法を利用すると，時間 t を座標 q_i の仲間に加えて拡張された位相空間での保存系の問題として扱うだけで，保存系に関する結論は一般化することができる．今度の正準積分は

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i' + p_t t'\right) d\tau \tag{82.14}$$

で定義され，付加条件

$$K(q_1, \cdots, q_n, t; p_1, \cdots, p_n, p_t) = 0 \tag{82.15}$$

の下で停留値を持つようにしなければならない．

変換の一つが

$$\bar{t} = K(q_1, \cdots, q_n, t; p_1, \cdots, p_n p_t) \tag{82.16}$$

であること以外にはいかなる制約も付いていない正準変換が見つかったとする．すると，変換された新しい座標系で見る付加条件は，

$$\bar{t} = 0 \tag{82.17}$$

で表され，正準積分は，

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i' d\tau \tag{82.18}$$

と書かれることが分る．この積分ではもはや付加条件は課されていない．しかし，この式はすべての Q_i, P_i が定数であることを意味している：

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = \beta_i \tag{82.19}$$

新しい座標系での正準方程式は，この場合にも簡単に求めることができる．今度は，どの変数も区別される理由がなくなっているので以前の場合よりも対称

的な形式になっていることが読み取れる．

条件 (82.16) 式は，偏微分方程式

$$K\left(q_1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ t\ ;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \cdots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = \bar{t} \tag{82.20}$$

の解と同等であり，この方程式の完全解を求めるためには n 個の変数 $Q_1, \cdots, Q_n$ に等置される積分定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を導入しなければならない．その上，付加条件のために変数 $\bar{t}$ は実現される運動では常にゼロでなければならない．そのため，最初から $\bar{t}$ をゼロとしておいてもよいのである．K と通常のハミルトンの関数 H の関係は $K = p_t+H$ であったことに注意すれば，偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\ \cdots,\ q_n\ ;\ t\ ;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \cdots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0 \tag{82.21}$$

が得られる．これが，任意のレオノーミックな力学系のハミルトン・ヤコビの偏微分方程式である．

この変換理論の特筆すべき点は，$K=0$ で表された等エネルギー面と $t=0$ の平面に移す正準変換さえ求められれば，位相流体の全流線を平行な直線群に変換できることである．

ここまでは，位相空間に二つの次元（t と p_t）を追加するだけで保存系で得られた結論がそっくり非保存系にも一般化できることを利用してきた．しかし，位相空間を広げないで時間 t を独立変数として扱う方法もある．この方法では，t を変換に関与する変数としないで，q_i, p_i を Q_i, P_i に変換する正準変換を考える．時間 t はこの変換のパラメータであり，旧座標から新座標への変換が時間に依存して変化することになる．このような時間依存性を持つ正準変換においては，ハミルトンの関数は変換の不変量ではない．(74.13) 式から分かるように，新しい座標系でのハミルトンの関数 H' は

$$H' = \partial S/\partial t+H \tag{82.22}$$

であたえられる．ここで，われわれは

$$H' = 0 \tag{82.23}$$

であることを要請する．これは，(82.21) 式に他ならない．すなわち，ハミルトン・ヤコビの編微分方程式は，時間に依存する正準変換によってハミルトンの関数が $H'=0$ に変換される条件であると解釈される．新しい座標系から見たと

きのハミルトンの関数がゼロであるから，正準運動方程式からすべての変数 Q_i, P_i は定数であることはすぐに分かることである．こうして，先に述べた方法で得られた結論が別の解法によっても証明される．

以上の変換理論の結論を計算を実行する立場から，積分法を含む「処方箋」としてまとめると次のようになる（手続きがたとえ分かったにしても，ハミルトン・ヤコビの理論の全容を理解したと早合点してもらっては困る）：

1. 偏微分方程式 (82.21) の任意の完全解，すなわち，n 個の積分定数を含む解を求める；

$$S = S(q_1, \cdots, q_n, t\,;\,\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{82.24}$$

2. n 個の積分定数による S の偏微分を新しい変数と等置する；

$$\partial S/\partial\alpha_i = \beta_i \tag{82.25}$$

3. これらの方程式を位置座標について解くと

$$q_i = f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n, \mathrm{t}) \tag{82.26}$$

が得られる．

この方法によって運動の問題の完全解が求められたことになる．なぜならば，力学変数は時間 t と $2n$ 個の積分定数の関数として表現されたからである．積分定数は，初期条件によって決定される．

《**問題** 2》 H は時間 t に依存しないとし，

$$S = -Et + S_1(q_1, \cdots, q_n\,;\,\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E)$$

と置く．S としてこの形のものを用いて一般論に適用すれば，保存系に対して成り立っていた第 1 の方法に戻ることを示せ．

《まとめ》 正準運動方程式を直接的に解く代わりに，変換法を利用して解くこともできる．保存力学系ならば，ハミルトンの関数 H を新しい変数の一つに変換するような正準変換が見つけられる．レオノーミックな力学系では，ハミルトンの関数 H' をゼロに変換する時間に依存した正準変換がある．いずれの方法でも，新座標系での運動方程式は直接解くことができ，これで力学問題は解けたことになる．求める変換は，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解から決定される．

§ 3. 変数分離による偏微分方程式の解法

偏微分方程式の一般的解法はまだ見つかっていない．しかし，特別の条件が満たされている場合には，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解を求めることができる．この特別の場合の問題が理論物理学の発展にとってきわめて重要であることが分かってきた．Bohr の原子論の基本的問題の幾つかは，この部類に属している．この種の問題では，n 変数の偏微分方程式が n 個の1変数常微分方程式の組に置き換えられる．それらの方程式は，完全に解くことが可能である．この種の問題は，変数分離型の問題と呼ばれる．

変数分離法とは次のような解法である．n 変数の関数 S に対する偏微分方程式を1変数関数の和

$$S = S_1(q_1)+\cdots+S_n(q_n) \tag{83.1}$$

の形式で解くことを考える．このことが許されるか否かは，最初から分かっているわけではない．ハミルトンの関数の代数的形式から変数分離が可能か否かを予測することはできない．Levi-Civita[1] はハミルトンの関数から変数分離型であるか否かを判定する方法を提案しているが，時と場合によっては (83.1) 式の形式を仮定して偏微分方程式を解いてみた方が手っとり早いことがある．

(83.1) 式であたえられる解の特徴は，運動量

$$p_k = \partial S/\partial q_k = \partial S_k(q_k)/\partial q_k \tag{83.2}$$

が q_k のみの関数になっている点である．そこで，エネルギー保存則を

$$H(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n)-E = 0 \tag{83.3}$$

と書き，これを p_k に関して解く．(83.2) 式からは p_k は q_k のみの関数でなければならないことが要求されるけれども，実際に解いてみるとこれ以外の変数も含むこともあろう．他の変数を組み合わせることで定数が作れるのであれば，この不一致は問題ない．したがって，(83.3) 式が n 個の関係式

$$p_k = g_k(q_k, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E) \tag{83.4}$$

と同じものであると見なすことができて変数分離型であったことが分かる．ここで，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ は変数分離の際に現れる任意の定数である．通常は，すべて

1) T. Levi-Civita, Mathematische Annalen (1904), LIX, 383.

の定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ が (83.4) 式に現れることはないであろう．時によっては，最初に分離した変数が 1 個の定数を，二番目に分離した変数が第 2 の定数を 1 個といった具合に分離定数が決まっていくこともある．こうして，最終的に n 個の分離定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が決まり，エネルギー E はこれらの定数の関数であたえられる：

$$E = \phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{83.5}$$

この方程式を解いて α_n を $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ と E の関数としてあたえることもできる．それゆえ，形式 (83.4) は，変数分離型のすべての解を含む．逆に，力学系の方程式が変数分離型であるならば，(83.4) 式のような一般形式の n 個の方程式が存在しなければならない．

(83.2) 式を使って p_k を dS_k/dq_k で置き換えると，

$$S_k = \int g_k(q_k, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E)dq_k + C_k \tag{83.6}$$

が得られる．ここで定数 C_k は最終的には母関数 S の定数項に当たる量であるが，これは何の効果ももたらさない項であるから無視してよい．運動の恒量は，こうして変数分離の方法を用いて求められる．

典型的な例題として，ケプラーの問題を考えてみよう．極座標系を用いて線素は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{83.7}$$

であたえられる．ハミルトンの関数は，

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} \right) - \frac{k^2}{r} \tag{83.8}$$

と書かれる．方程式 $H=E$ は次のように分離できる：

$$\begin{aligned} p_\phi &= \alpha = \text{一定}, \\ p_\theta^2 + \frac{\alpha^2}{\sin^2\theta} &= \beta^2 = \text{一定} \\ \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) - \frac{k^2}{r} &= E \end{aligned} \tag{83.9}$$

変数分離法を利用すれば，必要な数の定数が自動的に求められる．この問題を直接的な方法で解く場合も，これ以上の定数を導入する必要はない．

《問題 3》 変数分離法で一様重力場 ($V = mgz$) の下での質点 m の運動方程式を解け．

《問題 4》 非等方的な振動子の問題 ($V = m(k_1{}^2x^2+k_2{}^2y^2+k_3{}^2z^2)/2$) を変数分離法を用いて解け．

《問題 5》 シュタルク効果の問題 ($V = -k^2/r+E\cdot z$; E は z 軸方向の電場の強さ) 双曲線座標系

$$x = \sqrt{uv}\cos\phi,\ y = \sqrt{uv}\sin\phi,\ z = \frac{1}{2}(u-v)$$

を用いて解け．ある場合には，変数分離が可能である．前期量子論ではこのような場合を縮退していると称した．たとえばケプラーの問題では，極座標を用いるときには変数分離型になるけれども，双曲線座標を用いると変数分離ができなくなる．

変数分離型の力学系ではハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解は求積法を用いて求められることを (83.6) 式は示している．この場合は特殊なものであり，正準共役変数のどの対 q_k, p_k もこれらの変数間でのみ影響しあっているが他の変数には関係しない．その結果，n 自由度系が 1 自由度系の重ね合わせと見なされる．しかし，どれか一つの変数 α_k は複数の S_i にまたがって含まれており (E もそうである)，運動方程式

$$\partial S/\partial\alpha_i = \beta_i,\ \partial S/\partial E = t-\tau \tag{83.10}$$

は変数分離ができない．

《問題 6》 ケプラーの問題の母関数 S と完全解を求めよ．(例題参照)

《問題 7》 一様重力場の問題の母関数 S と完全解を求めよ．

変数分離にまつわる性質は力学系の物理的性質に関係しているものではなくて，ひとえに座標系の選び方にかかっている．ある座標系では変数分離型でなかった力学系も適当な点変換により変数分離型にすることができる場合もあろう．都合のよい座標系をいかにして見つけるかということは，一般的で系統的な方法がまだ見つかっていないので，いわば偶然に任されている．Burgers[3] はシュタルク効果とゼーマン効果の両方を含む問題（電場と磁場によって摂動を受けている原子核のまわりの電子の運動）では，どの座標系を用いても変数分離できないけれども適当な正準変換を施せば変数分離型にできることを示して

3) J. M. Burgers, Het Atoommodel van Rutherford＝Bohr (Leyden, 1918)

いる．

《ま　と　め》 特別の条件が満たされている場合には，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式は求積法を用いるだけで解くことができる．このような条件が満たされる場合は，エネルギー保存の式が正準共役変数の組 q_k, p_k のうちでただ１対の変数のみを含む項の和で表されている場合である．この場合，母関数 S は n 個の１変数関数の和として求められる．積分定数は変数分離の段階ごとに導入される．

§ 4.　可分離周期的系にたいするドロネーの方法

変数分離法（もし適用できるならば）は，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解を求める場合に有効である．１階偏微分方程式の「完全解」は，幾とおりにも表すことができる．いま，完全解が

$$S = S(q_1, \cdots, q_n;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E) \tag{84.1}$$

であたえられたとしよう．ここで積分定数について任意の点変換を施す：

$$\alpha_1 = f_1(\gamma_1, \cdots, \gamma_n),\ \cdots\cdots,\ \alpha_{n-1} = f_{n-1}(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$$

$$E = f_n(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \tag{84.2}$$

これらの関係式を (84.1) 式に代入して

$$S = S(q_1, \cdots, q_n;\ \gamma_1, \cdots, \gamma_n) \tag{84.3}$$

が得る．付加条件として

$$E = f_n(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \tag{84.4}$$

を考慮すれば，(84.3) 式がハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解である．

分離定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E$ を変換された力学変数 $Q_1, \cdots, Q_n$ と見なしたと同様に，新しい定数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ の方も力学変数と見なすことができる．これで，q_i, p_i から Q_i, P_i への変換のうちで，ハミルトンの関数 H を

$$H' = f_n(Q_1, \cdots, Q_n) \tag{84.5}$$

に変換する正準変換が得られたことになる．この形のハミルトンの関数は，$H' = Q_n$ と置いたものよりは複雑であるが，新しい座標系に移ったとき正準運

動方程式を具体的にあたえることができる．H' は Q_i だけを含み P_i を含んでいないから，変数 P_i はこの問題の循環変数である．したがって，

$$\dot{Q}_i = \partial H'/\partial P_i = 0 \tag{84.6}$$

が成り立ち，解

$$Q_i = \gamma_i = \text{定数} \tag{84.7}$$

が得られる．一方，正準方程式の第2の組から

$$-\dot{P}_i = \partial H'/\partial Q_i = \upsilon_i = \text{定数} \tag{84.8}$$

となることが分かる．ここで，右辺の定数の意味はどの Q_i も定数であったことに由来する．したがって，

$$-P_i = \upsilon_i t + \delta_i \tag{84.9}$$

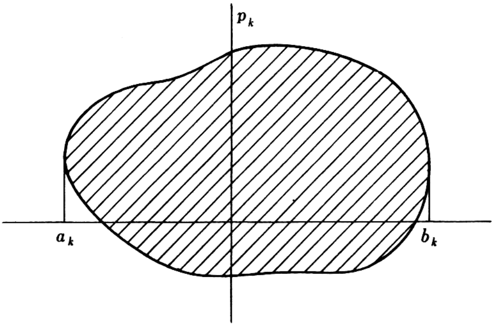
となり，正準運動方程式の完全解が求められたことになる．

この形での一般解のもつ利点は，次のとおりである．分離定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ の物理的意味は定かでない場合でも，新しい定数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ にははっきりした物理的意味をあたえることができる．それゆえ，元の分離定数で解を表現するよりは，新しい定数を用いることの方が理論的結論として優れている．この方法は，ドロネー(フランス，天文学者)[3] によって発案された．ドロネーの理論は，一見すると理論的で取扱が複雑であるように見えるかも知れない．しかし，もともとは天体物理学の計算のために導入されたのではあったが，この方法のおかげでハミルトンの方法が多くの物理学者の注目を集めることになった．

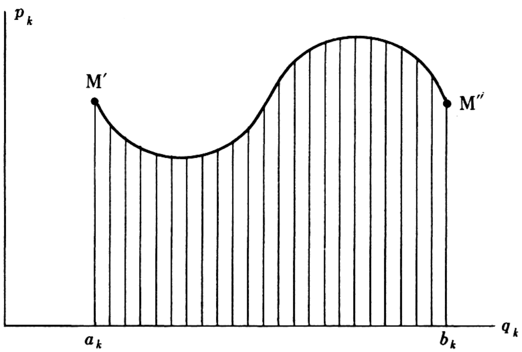
変数分離ができたなら，正準共役変数対の一方は他方にのみ依存しそれ以外の変数には全く依存しなくなることが分かった．したがって，α_i が定数であることと (83.4) 式を利用すれば，(q_k, p_k) 平面での流線を求めることができる．古典力学では一般にハミルトンの関数は運動量 p_k の2次関数であたえられるから，方程式 $H=E$ の解を求めるためには2次方程式を解けばよい．このことから一般には p_k の値は一つの q_k に対して二つある．ここで，われわれは q_k の有限領域で判別式が正であるものだけが許されると仮定する．こうしておけば q_k は区間 $[a_k, b_k]$ で振動することになり，2次元位相流体の流線は閉じたものになる．

p_k と q_k の関係が2価でなくても，流線が閉じたものになる可能性が他にもある．変数 q_k の変域は空間の幾何学的連結性のために区間 $[a_k, b_k]$ に限定さ

れる場合がある．たとえば，座標として変域 $[0, 2\pi]$ の角度変数 ϕ を選ぶと，見かけ上は閉じていない流線も両端 a_k と b_k での値が等しいことから実際には閉じている（図 13，14 参照）．



第 13 図



第 14 図

このことは図 14 を円筒状に折り曲げて両端を一致させてみれば理解できよう．位相空間の C 点は M″ から M′ に移り，同じ流線上を移動し続ける．

以上二つの理由から，以下の議論においてはすべての (q_k, p_k) 面での流線は閉じていると仮定する．この場合には，流体中の粒子は同じ位置に再び戻る周期的な運動をする．もちろんこのことは，(q_k, p_k) 面に投影した軌道に関していえることである．決して，時間に関する周期性ではないことに注意しよう．一般には，$\dot{q}_k$，$\dot{p}_k$ はすべての座標 q_i, p_i に依存しているから出発点に戻っても

3) Ch. E. Delaunay, Surune nouvelle theorie analytique du mouvement de la lune (1846)

速度は変わっており，ただ1対の変数の組が初期値を再びとったとしても運動全体が周期的であるための十分条件ではない．しかし，この運動は n 個の独立な周期運動から成っており，それらは分離されないですべての変数にまたがっていることは確かである．ハミルトンの関数 H と母関数 S の性質から，運動の周期が求められるところにドロネーの方法の利点がある．適当な変換さえ見つけられれば，変数分離型の力学系の多重周期性を論じることができ，周期を求めることもできる．このことは，簡単な手続きで進められる．

分離定数 α_i とエネルギー E が正準変換された位置座標 Q_i に等しいことはすでに示した．次に，これらの変数を作用変数 J_i に変える．この名の由来はこれらの変数が作用の次元（すなわち，$q \cdot p$）を持つからである．方程式 (83.4) は仮定によって（q_k, p_k）面で閉じた軌道を描く．そこで，流線を一周する線積分

$$J_k = \oint p_k dq_k = \oint g_k(q_k, \alpha_1, \cdots, E) dq_k \tag{84.10}$$

を求める．この値は，流線の囲む領域の面積に等しい．この面積の大きさは分離定数 α_i とエネルギー E の関数である：

$$J_k = J_k(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, E) \tag{84.11}$$

これを解いて

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \cdots, J_n) \tag{84.12}$$

$$E = E(J_1, \cdots, J_n) \tag{84.13}$$

が得られる．この関係式を利用して，母関数 S を作用変数の関数として表現することができる：

$$S = S(q_1, \cdots, q_n ; J_1, \cdots, J_n) \tag{84.14}$$

これで正準変換が求められた．新しい座標系での基本的関数は E と S である．関数 E は，新しい座標系でのハミルトンの関数になっている．

作用変数 J_i は新しい座標系では位置座標 Q_i に該当する．正準共役運動量 P_i は角変数と呼ばれる．角変数は物理的次元を持たない．P_i より $-P_i$ を用いた方が便利である．$-P_i$ を ω_i と置くと，変換の一般論から

$$-P_i = \omega_i = \partial S / \partial J_i \tag{84.15}$$

が得られる．

これらの方程式をもう少し詳しく調べてみよう．われわれが知りたいのは，作用変数 J_i を固定したときの旧座標 q_i と新変数 ω_i の汎関数関係である．すなわち，n 次元の q 空間の n 次元 ω 空間への写像と逆写像について知りたいのである．ω_i を J_i の関数と見る関係式 (84.15) は，1価ではない．まず第1に，運動を表現するのに必要な q_i の配位空間は，n 次元 q 空間の限定された領域であることに注意しよう．座標 q_i の変動には上限と下限がある．したがって，q_i を n 次元空間の直交座標にとるなら，変数分離型を仮定したからこの変域はこの空間での「長方形の領域」に限定される．例えば，ケプラーの問題では，分離型の方程式 (83.9) の変域は，ϕ では区間 $[0, 2\pi]$，θ では区間 $[\theta_0, \pi-\theta_0]$，r では $[r_1$ (近日点)，r_2 (遠日点)$]$ に限定される．

(q_k, p_k) 面の流線一つを取り出して追跡してみよう．このとき，他の q_i はみな固定しておいて q_k だけが最大値と最小値の間を変動させる．このとき ω_i にどのような変化が現れるかを調べてみよう．(84.15) 式によると ω_i の変化は，

$$\Delta\omega_i = \oint d\omega_i = \oint \frac{\partial^2 S}{\partial J_i \partial q_k} dq_k \tag{84.16}$$

であたえられる．この積分では J_i は，パラメータであるから，積分記号と J_i による微分記号とは交換できる．したがって，(89.16) 式は，

$$\Delta\omega_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\oint \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i}\oint p_k dq_k \tag{84.17}$$

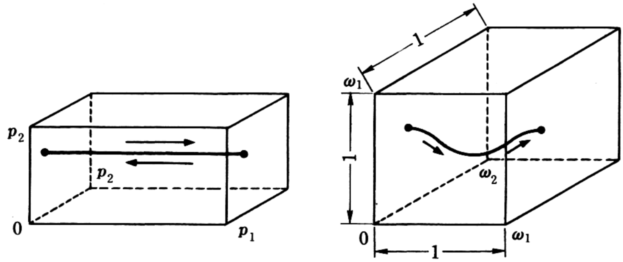
に変形される．最後の積分は定義から作用変数に等しい．したがって，

$$\Delta\omega_i = \partial J_k/\partial J_i = \delta_{ik} \tag{84.18}$$

ここで，δ_{ik} はクロネッカーのデルタ関数である．

q_k は1サイクルを終えたとき，ω_k が1だけ増加するのみで他の変数 ω_i は変化しない．この結果は，角変数 ω と位置座標 q の関係を知る上での糸口になる．ω 空間の方は，「鏡の部屋」の特徴を備えている．n 次元空間に一辺が単位長さの立方体を思い浮かべてみよう．この立体の壁は鏡でできているとする．いま，この領域内にある1点を考える．この点の像は，壁に垂直なすべての方向に無限個映し出される．単位立体も同じく無限個映し出される．しかし，単位立体内の点 Ω の無限個の像は，q 空間の1点 Q に対応する．

この幾何学的描像は，解析的性質に反映する．q_i を ω_i の関数と見なし，q 空



第15図

間と ω 空間の関係を逆に見てみよう．ω_i が1だけ変化しても q_i が変化しないということは，q_i は $\omega_1, \cdots, \omega_n$ に関して周期1の周期関数であることに他ならない．このことはまた，q_i は多重フーリエ級数で表現されることを意味している．すなわち，引数が

$$2\pi(k_1\omega_1+\cdots+k_n\omega_n) \tag{84.19}$$

の sin 関数と cos 関数の級数の和として q_i が表される．ここで，$k_1, \cdots, k_n$ は任意の整数である．級数の振幅は定数である．

図15は，q_k が二つの値の間で振動すること（図13）に対応して，q 空間から ω 空間への変数が2価であることを示している．図14の条件が満たされているならば，旧変数 q_k は角変数であることから q 空間から ω 空間への変換は1価である．ω 空間から q 空間への変換は常に1価である（ω 空間の1点は，q 空間の1点に変換される）．

q 変数と ω 変数のこうした知識は運動の完全解について具体的描像を得る上で役立つ．いままでの議論では，正準運動方程式にはあまり注意を払ってこなかった．正準変換に関することだけを論じてきた．以下では，J_i と ω_i を用いて正準方程式が解けることを示そう．変数 J_i は変数 Q_i に，変数 $-\omega_i$ は P_i に対応していた．ハミルトンの関数は $E(J_1, \cdots, J_n)$ であった．したがって，正準運動方程式の第1の組は，

$$\dot{J}_i = -\partial E/\partial\omega_i = 0 \tag{84.20}$$

であり，解は

$$J_i = \text{定数} \tag{84.21}$$

である．前節では J_i が定数であることを仮定した．正準方程式の第2の組は

$$\dot{\omega}_i = \partial E/\partial J_i = \nu_i = 定数 \tag{84.22}$$

であたえられ（(84.7) 式参照），解は

$$\omega_i = \nu_i t + \delta_i \tag{84.23}$$

である．ω_i の値を (84.19) 式に代入すれば，運動全体の解析的像は規準振動数が ν_i の調和振動子の重ね合わせであることが分かる．作用変数で表せば，振動数は全エネルギーから求められる．すなわち，振動数はエネルギー $E(J_1, \cdots, J_n)$ の作用変数 J_i で偏微分としてあたえられる．

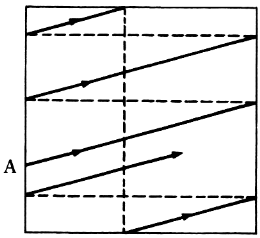
《問題 8》　§ 3 の問題 4 の非等方的な振動子の問題をドロネーの方法を適用して解け．

$$E = (k_1 J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3)/2\pi,$$

$$\nu_i = k_i/2\pi$$

であることを示せ．

こうした解析をさらに先まで進めることができる．ω 空間での軌道を追跡してみよう．方程式 (84.23) はこの軌道は定速度で進む 1 本の直線であることを示している．これに対応する q 空間での曲線がリサージュの図である．ω 空間は単位長さの辺をもつ立体になっていることを利用することにしよう．もし直線が単位立体の一つの壁に達すると，その点は対応する反対側の壁の点に飛び移り，その後は再び壁に達するまで直線運動をする．これを繰り返す．この様子を図16に示した．全く偶然にこの軌道は同じところに戻ることがあるかも知れない．しかしほとんどの場合同じところに戻ることはないであろう．このことの判定条件は，



第 16 図

$$k_1\nu_1 + k_2\nu_2 + \cdots + k_n\nu_n = 0 \tag{84.24}$$

が成り立つか否かである．k_i は整数である．もしこのような関係式が $n-1$ 個あったとすると，直線軌道は有限時間内に再び出発点に戻り，運動は周期的である．もしそうでないなら，単位立体内部を埋め尽くすであろう．軌道は，立体内のどの点の近傍をもいつかは必ず通過する．(84.24) 式の関係が全部で m 個しかない場合には，軌道は単位立体の $(n-m)$ 次元の部分空間内に留まり，

この部分空間内のどの点をも必ず通過する．この結果は，旧座標 q_i の配位空間での描像に引き移すことができる．このとき，直線が曲線に変わり，平坦な部分空間が同じ次元数の曲がった部分空間に変わる．

ドロネーの方法は，前期量子論において「縮退のある系」に新しい光を当てた．もし運動が配位空間の限られた領域を完全に覆い尽くすなら，その力学系は縮退していず一種類の座標系によってだけ変数分離できる．こうした状況は，振動数の間に整数関係が成り立っていない場合に見られる．(84.24) 式のような条件式がたとえ一つでも存在したとすると，運動は配位空間の一部分に押し込められてしまう．そうなってしまった力学系は，縮退していることになる．

例として，ケプラーの問題を再度考えてみよう．エネルギー E は，

$$E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(J_1+J_2+J_3)^2} \tag{84.25}$$

であたえられた．したがって，(84.22) 式から

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 \tag{84.26}$$

であることが分かる．運動は一つの楕円に沿って起こる．弱い磁場を加えると，楕円面は極軸方向を中心にしてゆっくり歳差運動し縮退が解ける（ゼーマン効果）．第2の縮退も引力が距離の逆2乗法則からごく僅かでも外れることで解くことができる．現実には運動が相対論的であることでこの縮退の方は解けている．このことが楕円軌道の近日点移動の原因になっている．これらの効果のために，運動は配位空間の許された領域を限なく覆い尽くすものになる．

ドロネーの方法は，天体運動の摂動論から生まれた．しかし，前期量子論において盛んに利用された．ボーアの量子論によると，電子軌道は特別の条件を満たすものだけが実現される．このような軌道は少しもエネルギーを失うことがないので，電子の運動は通常の力学法則に従っていると思われた．したがって，前期量子論はいかなる修正も施すことなしに力学の諸原理（正準方程式も）を受け継いだ．前期量子論は，初期条件に関してだけ<u>特別の条件</u>を必要としただけである．$2n$ 個の運動の恒量は，通常の量ではもはやなくなって，ある規則に従って「量子化された」物理量とされた．「量子条件」を議論するのにドロネーの方法は非常に好都合であった．ドロネーの変換（(84.23) 式参照）で

は，正準方程式の第2の組を解いて得られた位相 δ_i（第2の恒量）はまったく任意であった．しかし，第1の恒量（作用変数）の方は量子化された．量子条件は，ドロネーの作用変数を

$$J_k = n_k h \qquad (n_k\text{：整数}) \tag{84.27}$$

と等置することである．h は有名なプランクの定数である．整数 n_k は量子数と呼ばれる．したがって，天体力学の摂動論として導入されたドロネーの方法は，原子物理学の分野に最も重要な適用例を見いだしたのであった．

条件（84.27）は，Sommerfeld-Wilson の量子条件（1915年）と呼ばれる．この条件は変数分離型の力学系に対してだけ適用することができる．そのうえ，量子化が使用する座標系に依存しており，座標系ごとに全く異なる軌道が現れる．Einstein（1917年）は，(q_k, p_k) 面での流線という見方をやめて母関数 S を用いて量子条件を意味付けようとした．(83.2) 式を位相積分（84.10）に代入すれば，S_k の1周期後の変化 ΔS_k が求められる．すなわち，量子条件は母関数 S_k の多価性に関係していることが分かる．Einstein は

$$\Sigma J_k = \Sigma \Delta S_k = \Delta S = nh \tag{84.28}$$

$$n = \Sigma n_k$$

と置いた．この一つの方程式を元の多数の条件式で置き換えることはできない．Einstein は，この式を恒等式と見なさないで，一つの原理であると考えた．彼は，配位空間の任意の閉じた軌道で1周期ごとの母関数の変化はプランク定数の整数倍であるということで母関数の多価性を表した．変数分離型の力学系では，このような閉曲線として q_k＝定数を選べば，条件（84.27）は Einstein の条件式から導ける．de Broglie（1924年）は Einstein の条件式を手がかりに物質波の存在を予言した．

《ま　と　め》 Delannay は変数分離型の力学系を扱う優れた方法を提案した．この方法では，(q_k, p_k) 面の流線は閉じている．彼は，流線の囲む領域の面積で定義された作用変数 J_k が位置座標に変換する正準変換を導入した．J_k は運動の恒量であり，角変数（正準運動量の符号を変えた量）ω_k は時間 t に比例する．エネルギー E を J_k で偏微分して n 個の運動の恒量（振動数 ν_k）が求められる．q_k は常に振動数 ν_i で定義される多重フーリエ級数で表される．このことから，この種の力学系は多重周期的であるといわれる．

§ 5. ハミルトンとヤコビの理論における偏微分方程式の役割

第7章§9で述べたように，解析力学の基礎方程式となった偏微分方程式を最初に提案したのは Hamilton であった．微分演算と消去法だけを使って力学系の軌道を決める基本的関数が存在することに気付いたのも Hamilton であった．しかし，Hamilton の枠組は実際に展開する上で不便なものであった．そのうえ，ハミルトンの主関数は二つの偏微分方程式を満たしていなければならず，解く立場からするとこの理論は必要以上に複雑である．一方，ヤコビの理論は，基礎となる偏微分方程式の完全解を必要とするだけである．変数分離型の力学系では，完全解を実際に求めることもできる．したがって，皮相的に解釈すると Jacobi はハミルトンの理論の無用の複雑さを解消し，計算が実行できる理論体系にまとめ直したということになろう．

力学の問題とは単に解を求めることであるとする立場なら，この解釈でよいかもしれない．しかし，この解釈はきわめて偏見に満ちたものであり，ハミルトンの理論の深遠な内容を少しも捉えていない．たとえハミルトンの主関数は具体的に求められないしヤコビの方法を頼りにしなければならないにしても，この主関数は正準方程式を解く目的以上に基本的内容を持っていることには変わりない．ハミルトンの主関数 W とヤコビの母関数 S を比較することは，単なる好みの問題でしかない．ハミルトンの理論の含蓄を理解すれば，二つの偏微分方程式が理論的にはヤコビの理論の一つの偏微分方程式に帰着されることが分かる．まずはじめに，保存力学系の問題を考えてみよう．時間 t を力学変数に加えて，位相空間を (q, t) 空間に拡大し，「独立変数 t」に変えて「独立なパラメータ τ」を用いるならばどんな力学系も保存系になるから，この仮定は一般的なものである．点 $(q_1, \cdots, q_n)$ と点 $(\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n)$ を考え，積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{k=1}^{n} p_k q_k' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{k=1}^{n} p_k dq_k \tag{85.1}$$

が付加条件

$$H(q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n) - E = 0 \tag{85.2}$$

の下で停留値をあたえる軌道でこの2点を結んでみる．停留値をあたえる軌道に対しては，積分 A の値を座標 q_i と $\bar{q}_i$ の関数として表すと，それでハミルトンの主関数が決まる：

$$W = W(q_1, \cdots, q_n; \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n) \tag{85.3}$$

Hamilton はこの関数が，偏微分方程式

$$H(q_1, \cdots, q_n; \partial W/\partial q_1, \cdots, \partial W/\partial q_n) - E = 0 \tag{85.4}$$

を満たすことを証明した．ヤコビの母関数 S との類似性に関する限りこれで十分である．どちらも $2n$ 個の変数の関数であり，どちらも正準変換を生成する．また，(85.4) 式を解く場合でも，どちらの関数も n 個の積分定数を必要としている．

二つの関数の差異をしらべるには，第2の偏微分方程式を持ち出さなくてもよい．ヤコビの理論においては，エネルギー E は新しい変数 Q_n の一つであった．偏微分方程式の解は，エネルギーの他に（$n-1$）個の運動の恒量を含む．ハミルトンの理論ではどの変数も平等に扱われており，エネルギー E はあたえられた定数であり変数ではない．したがって，偏微分方程式についてのハミルトンの解は，完全解よりも1個だけよけいに運動の恒量を含んでおり，優完備である．変数の同質性こそが，ヤコビの S 関数とハミルトンの W 関数の違いを示している．このことのために，変換の性質は W 関数と S 関数とでは全く異なってくる．

ヤコビの S 関数を用いると等エネルギー面 $H=E$ は，$Q_n=E$ の平面に変換される．ここでの偏微分方程式の働きは，ハミルトンの関数を新しい変数の一つ Q_n に変換することである．ハミルトンの方法では，事情は全く違っている．エネルギー面を平面に移すというのではなく，ハミルトンの関数はエネルギー面 $H=E$ に限定されていてこの面から離れることは許されない．ヤコビの方法では，新旧座標の間に正則な変換が存在する．微分方程式は，q_k, p_k, Q_n の間の関係を決めはするが q_k, p_k の間の関係を規定してないので，座標の間のいかなる恒等的関係式も存在しない．一方，ハミルトンの方法では（q_k, p_k）空間が平面に変換されるがこれは正則な変換ではない．方程式

$$p_i = \partial W/\partial q_i \tag{85.5}$$

は $\bar{q}_i$ に関して解くことができない．なぜなら，q_i, p_i を $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ に変換する正準

変換は，位相空間の点（q_i, p_i）がエネルギー面の点であるときに限って存在するのみであるからである．このことは，q_i について方程式 (85.5) の行列式の値がゼロであることを意味する：

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \overline{q}_j} \right\| = 0 \tag{85.6}$$

この点が，ヤコビの理論にはないハミルトンの理論の特徴の一つである．ハミルトンの偏微分方程式は位相空間の特定の面に限定されている点（q_k, p_k）の間の関係を決定しているのである．

このことを，3次元空間での1次変換（自分自身への写像）を例にとって考えてみよう．座標 x, y, z は空間Iに属しており X, Y, Z は空間IIに属しているとする．変換の行列式（ヤコビの行列式）の値がゼロでないならば，変換は1対1である．次に，変換の行列式の値がゼロであったと仮定しよう．このときには，X, Y, Z の1次関数として表される x, y, z の間には，次の関係式が成り立つ：

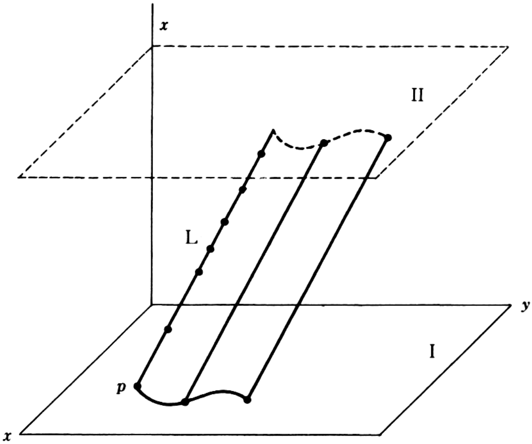
$$Ax+By+Cz = 0 \tag{85.7}$$

これは，点（x, y, z）は一つの平面上に制限されることを意味する．この面は回転させて $z=0$ の面に一致させる変換は

$$\begin{aligned} x &= X+\alpha Z \\ y &= Y+\beta z \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{85.8}$$

となる．変換 (85.8) は，空間Iが空間IIに変換される $z=0$ の面に還元されたことを表している．したがって，この変換は点対点変換ではない．空間IIから空間Iへは点対点変換が存在する．しかし，空間Iから空間IIは，点対線変換である．直線Lの底点pは1本の直線に変換される．

こうした点対線変換が，特異変換の特徴であり，なぜ主関数によって生成される変換が正則ではあり得ないかを説明している．それでも何とかして運動を表現したい．すなわち，点（q_i, p_i）を後の時刻の点（q_i, p_i）に変換しなければならない．この変換が点対線変換なのである．ヤコビの理論には，この点対線変換は全く異なった形で現れる．変数 Q_n は他の変数と区別されている．P_n は定数でないことを除けば，点（Q_i, P_i）は固定点である．したがって，$n-1$ 個



第 17 図

の方程式

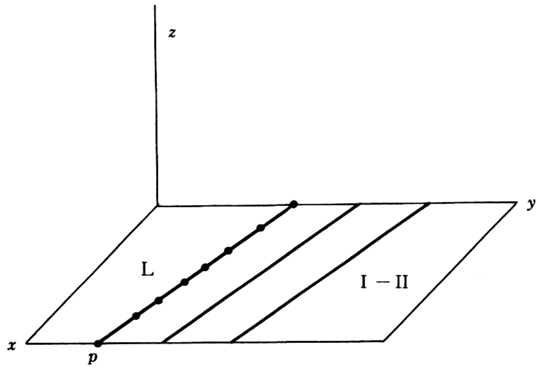
$$Q_k = -\partial S/\partial Q_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{85.9}$$

を q_i について解き，n 個の座標 q_i の間の関係として $n-1$ 個の方程式を求めなければならない．その結果，線が得られる．ハミルトンの方法では P_n を含むすべての変数 P_i は定数であり，ここに現れた点対線変換は変換の特異性に由来している．

議論をさらに進めると，一方向での変換の特異性だけでは不十分であることが分かる．$H=E$ の面に運動は限定されており，この面上の点をこの面の近傍にある面に変換することはできない．そのような変換があったとしても，それは運動とはかかわりがない．上の例で平行な直線群と z 面のなす角を小さくしていき，最終的には $z=0$ の面に移せたと仮定する．そうすると変換は，どちらの方向にも正則でなくなっている．空間 I は $z=0$ の面に還元されたが，空間 II もおなじように $z=0$ の面に還元される．

空間 I から空間 II への変換も，空間 II から空間 I への変換もどちらも点対線変換になり，完全に対称的になった．

以上がハミルトンの主関数による変換の描像である．各点 (q_i, p_i) は等エネルギー面上の直線群に変換されるから，面 $H=E$ は自分自身の中へ変換される．このことは，点 (q_k, p_k) だけでなく点 $(\overline{q}_k, \overline{p}_k)$ も等エネルギー面 $H=E$



第18図

上にあることを意味する．これが，第2のハミルトンの偏微分方程式の内容である．変換の行列式の値がゼロであるから，(85.5) 式を $\bar{q}_i$ について解くことができなかったと同じように，方程式

$$\bar{p}_i = -\partial W/\partial \bar{q}_i \tag{85.10}$$

の変換の行列式の値はゼロになっていて，q_i について解くことはできない．q_i と $\bar{q}_i$ に関してはいつも対称であって，変換の行列式 (85.6) の値はどちらの場合も同じ値をとる．したがって，一方の変換の特異性は，逆の変換の特異性をも含んでいる．偏微分方程式の一方だけでは完全ではなく，もう一方の偏微分方程式が必要なのである．両者を結び付ける関係式が条件 (85.6) なのである．

次に，拘束条件が時間に依存する場合について考察する．事情はほとんど同じであるから，簡単な解説に留めておこう．時間 t も力学変数に加えることができた．「拡張された作用積分」

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q_i' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + p_t dt \right) \tag{85.11}$$

は，拡大された位相空間のC点が「拡張されたエネルギー面」

$$p_t + H(q_1, \cdots, q_n, t\,;\, p_1, \cdots, p_n) = 0 \tag{85.12}$$

にいつでも留まっているという付加条件の下で停留値を持つことが要求される．今度も，拡張された位相空間の2点 $(\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n, \bar{t})$ と $(q_1, \cdots, q_n, t)$ の間で積分 (85.11) を求め，二つの座標の関数として表すと，

$$W = W(q_1, \cdots, q_n, t\,;\, \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n, \bar{t}) \tag{85.13}$$

が得られる.

《問題 9》 ハミルトンの主関数の定義は, 次の方法と同等であることを示せ.

(1) ラグランジュの運動方程式の完全解を次の形式で求める.

$$q_i = f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}, t)$$

(2) この解を使って定積分

$$A = \int_{\bar{t}}^{t} L dt$$

を求める. A は $t, \bar{t}$ と $2n$ 個の積分定数 α_i の関数になる.

(3) $2n$ 個の方程式

$$q_i = f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}, t)$$
$$\bar{q}_i = f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}, \bar{t})$$

を利用して $2n$ 個の積分定数を消去する.

(4) この結果を A の表式に代入する. この方法で求められた A がハミルトンの主関数 W である.

《問題10》 一様重力場 ($V = mgz$) での運動を直交座標系を用いて議論する. この系のラグランジュの運動方程式は初等的な方法で解くことができる. ハミルトンの主関数は

$$W = \frac{m}{2}\left[\frac{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2}{t-\bar{t}} - g(z+\bar{z})(t-\bar{t}) - \frac{1}{12}g^2(t-\bar{t})^3\right]$$

であたえられることを示せ.

この場合の変換方程式は

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, & \bar{p}_i &= -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i} \\ p_t &= \frac{\partial W}{\partial t}, & \bar{p}_t &= -\frac{\partial W}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \tag{85.14}$$

である. 付加条件 (85.12) を, 2点 (q_i, t, p_i, p_t) と $(\bar{q}_i, \bar{t}, \bar{p}_i, \bar{p}_t)$ で書くと, W 関数に対する二つの偏微分方程式が得られる.

ここでも再び変換の行列式の値はゼロになっており, 変換は正則でないから (q_i, t, p_i, p_t) を $(\bar{q}_i, \bar{t}, \bar{p}_i, \bar{p}_t)$ の関数として表すことはできない. この逆も同様である. しかし, 条件 (85.12) に沿って2組の座標を選び出すと, 一方は他方の結果として導出できるから, (85.14) 式の最後の二つの方程式はいらなく

なる．残った方程式は

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad \bar{p}_i = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i} \tag{85.15}$$

であり，これらは q_i, p_i に関して解くことができる．その結果，変換

$$q_i = f_i(t, \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_n, \bar{t})$$
$$p_i = g_i(t, \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_n, \bar{t}) \tag{85.16}$$

を得る．これが，任意の初期条件のもとでの運動方程式の完全解である．ヤコビの解と比較してみると運動の恒量は $2n$ 個ではなく $2n+1$ であることが分かる．このことは，W 関数が優完備であることの結果である．

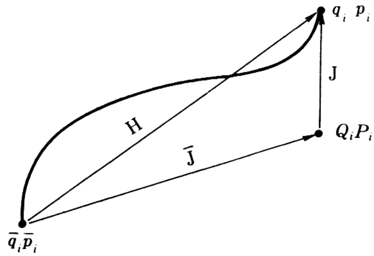
《ま　と　め》 ヤコビの変換理論では，エネルギー面は，平面に変換され曲がった軌道は直線に変換されるが，ハミルトンの主関数による変換では事情が大変異なっている．この変換は,等エネルギー面に限定されており，特異性のある変換である．この変換の変換行列式の値はゼロであるから，運動の結果は点対線変換性として描き出される．

§6．ヤコビの完全解とハミルトンの主関数の作成

ハミルトンの方法とヤコビの方法は別個に開発された理論ではあるが，主関数 W と母関数 S の間には一定の関係がある．ヤコビの方法は間接的にではあるが主関数 W を含んでいる．ヤコビの S 関数が求められたとすると，微分演算と消去法を使ってハミルトンの W 関数を組み立てることができる．

このことを示すには，第7章§7に示した無限小正準変換の話に立ち帰らなければならない．ヤコビの母関数 S は連続的に繰り返される無限小正準変換の母関数と見なされる．このことは位相流体の運動として描写される．位相空間の任意の点 (Q_i, P_i) は時間とともに変動する点 (q_i, p_i) に変換される．そこで，時刻 t には点 (q_i, p_i) に変換され，時刻 $\bar{t}$ には点 $(\bar{q}_i, \bar{p}_i)$ に変換されたとする．一方，ハミルトンの主関数は，点 (Q_i, P_i) を消去し，点 (q_i, p_i) を直接点 $(\bar{q}_i, \bar{p}_i)$ に変換する母関数と見なすこともできる．

次に，正準変換は群の性質を持っていること（第7章§7，参照）を利用す



第19図

る．すると，$(q_i,\ p_i)$ から $(Q_i,\ P_i)$ への変換も $(Q_i,\ P_i)$ から $(\bar{q}_i,\ \bar{p}_i)$ への変換もともに正準変換であるから，点 $(q_i,\ p_i)$ から点 $(\bar{q}_i,\ \bar{p}_i)$ への変換も正準変換になる．最後の変換の母関数は，前の2回の変換の母関数の差に等しい（(77.3) 式，参照）．したがって，

$$W = \Delta S \tag{86.1}$$
$$= S(q_1,\ \cdots,\ q_n;\ Q_1,\ \cdots,\ Q_n;\ t)-S(\bar{q}_1,\ \cdots,\ \bar{q}_n;\ Q_1,\ \cdots,\ Q_n;\ \bar{t})$$

が得られる．ここでさらに

$$P_i = \frac{\partial S(q,Q,t)}{\partial Q_i},\ P_i = \frac{\partial S(\bar{q},Q,\bar{t})}{\partial Q_i} \tag{86.2}$$

を付加条件として考慮しなければならない．これらの方程式を用いると n 個の方程式

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial Q_i} = 0 \tag{86.3}$$

が得られる．この条件式は，n 個の変数 Q_i を消去するために用いることができる．その結果，われわれは W 関数を $q_i,\ t$ と $\bar{q}_i,\ \bar{t}$ のみの関数として表すことができる．

以上のことから，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解から，ハミルトンの主関数を導く手続きは次のようにまとめられる：

1．母関数 S の差を求める：

$$\Delta S$$
$$= S(q_1, \cdots, q_n,\ t,\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n)-S(\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n,\ \bar{t},\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

2．方程式

$$\frac{\partial \varDelta S}{\partial \alpha_i} = 0$$

を α_i について解く．

3．解を$\varDelta S$ の表式に代入して，$q_1, \cdots, q_n,\ t$ と $\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n,\ \bar{t}$ の関数として $W = \varDelta S$ を求める．これがハミルトンの主関数である．

《問題 11》 一様重力場の問題（§5の問題8）のハミルトン・ヤコビの偏微分方程式を変数分離法で解け．その解からハミルトンの主関数を求めよ．その結果は，運動方程式の完全解を用いて作った主関数（§5の問題8）と一致することを確かめよ．

《問題 12》 保存力学系を考える．配位空間の2点間での時間に依存しない主関数

$$W = W(q_1, \cdots, q_n, \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n, E)$$

が求められたとする．この系では時間に依存する主関数は

$$W_1 = -E(t-\bar{t}) + W$$

であたえられることを示せ．ただし，エネルギー E は方程式

$$\partial W/\partial E = t-\bar{t}$$

を利用して消去してある．

《まとめ》 ハミルトンの主関数は優完全であるが，ヤコビの方法で求めた完全解から微分演算と消去法を用いるだけで求められる．

§7．偏微分方程式の幾何学的解法．ハミルトンの光学・力学アナロジー

これまでは，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の完全解が分かっているとして議論してきた．この仮定を少し弱いものに置き換えてみよう．すなわち，運動の恒量は一つも分かっていないが，偏微分方程式

$$H(q_1, \cdots, q_n, \partial S/\partial q_1, \cdots, \partial S/\partial q_n) = E \tag{87.1}$$

の特解は求められたとしてみよう．

解析的には，この特解は正準方程式の完全な組の内の半分を求めるのに利用でき

る．方程式

$$p_i = \partial S/\partial q_i \tag{87.2}$$

を使って，運動量 p_i を q_i の関数として表すことができる．この結果を方程式

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i \tag{87.3}$$

に代入すれば，われわれの問題は $2n$ 個でなく n 個の連立方程式を解く問題に還元される．以下では，この問題を解析的にではなく幾何学的に解く方法について解説する．

偏微分方程式 (87.1) の特解は幾何学的に求めることができる．この解き方を物理的に解釈すると力学の問題に新しい視野が開かれることになるし，光学と力学の類似性が見えてくる．この発見は，Hamilton の功績の一つである．波動（量子）力学においてこのアナロジーが，原子論の研究にとっての指導原理の一つとなっていたことはよく知られている．

以下の議論では，ポテンシャル・エネルギー V であたえられた力の場にいる粒子の運動について考察する．座標系はデカルト座標 x, y, z を用いる．しかし，次節で示すように結論は座標系のとり方に関係しない．

粒子の系のエネルギーは

$$({p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2)/2m+V(x, y, z) = E \tag{87.4}$$

である．これから母関数 S に対する偏微分方程式は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2m(E-V) \tag{87.5}$$

であたえられることが分かる．S は x, y, z の関数であるとする：

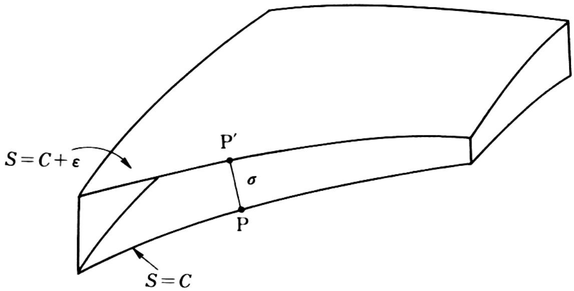
$$S = S(x, y, z) \tag{87.6}$$

このことは，方程式 (87.5) の完全解ではなく特解の一つが求められたことに該当する．完全解は，2個の運動の恒量 α_1, α_2 を含む解である．(87.5) 式の特解は，幾何学的に表すことができる．

母関数 S の勾配は

$$S(x, y, z) = \text{一定} \tag{87.7}$$

の面に直交していることはすでに示した．次に，隣接する二つの面 $S=C$ と $S = C+\varepsilon$ について考えてみよう．$S=C$ 面の点 P から $S = C+\varepsilon$ 面の点 P' に面の法線方向（すなわち，面の勾配）に沿って移ったとする．S の勾配の



第20図

絶対値は，S の方向微分と定義することができる：

$$|\,\mathrm{grad}S\,| = \partial S/\partial \upsilon \tag{87.8}$$

向きは，面の法線方向にとる．図20の記号を用いると

$$|\,\mathrm{grad}S\,| = \varepsilon/\sigma \tag{87.9}$$

と書ける．これと (87.5) 式と比較すると σ は

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2m(E-V)}} \tag{87.10}$$

であたえられることが分かる．この方程式を利用すれば，$S=C$ 面があたえられたとき $S = C+\varepsilon$ 面を求めることができる．$S=C$ 面上のすべての点から面に垂直な方向に (87.10) 式で計算された無限小の距離 σ だけ移動すればよい．

この作図法を繰り返すとハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の特解が求められる．この作図法は3次元空間のどの面からでも始めることができる．最初の面の母関数の値を $S=0$ としよう．この面の近傍に $S=\varepsilon$ の面を作図する．続いて，$S=2\varepsilon$ の面を作図する．以下これを繰り返す．最終的には有限の3次元領域が $S=$一定という多数の面によって覆い尽くされるであろう．このことは，偏微分方程式 (87.5) を満たしている関数 S が求められたことを意味している．

$S=$一定の面は，運動の問題と深い関係にある．この母関数 S を用いてヤコビ流に正準方程式を解こうとしてもそれは不可能である．なぜなら，この関数 S が Q_i にどのように依存しているかが分かっていないからである．今度は，変換方程式の第2の組ではなく

第1の組

$$p_i = \partial S/\partial q_i \tag{87.11}$$

を利用することにしよう．この式をベクトルを用いて

$$\boldsymbol{p} = \mathrm{grad}S \tag{87.12}$$

と書いてもよい．運動量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ は軌道の接線方向を向いており，次の定理が得られる：質点の軌道は S＝一定の面に垂直である．力学的に可能な軌道の組は，S＝一定の面に垂直な軌道を描くことで求められる．

この定理には次のような意味がある．エネルギー E の軌道群を考える．これらはどれも，$S=0$ の面に出発点を持つとする．これらの軌道は，どれとも直交している無数の S＝一定の面群を持つ．この軌道は光線と全く同じ振舞いをするから力学の軌道は「光線の性質を持つ」といわれる．光線は波面に垂直な軌道として特徴付けられる．同様のことが，保存力学系の軌道にも当てはまる．力学の軌道も S＝一定の面に垂直である．

光線が光波面に垂直であるということは，結晶中の光の伝播については成り立っていない．同様に，力学の軌道もいつも S＝一定の面に直交しているとは限らない．磁場中の電子の軌道は，S＝一定の面に垂直ではない．このような場合でもユークリッド的でない幾何学的描像を用いると直交性が保証されうる．次の節で示すことであるが，そのような幾何学は配位空間の動力学的構造に本質的に関係している．線素がヤコビ型 $\overline{d\sigma} = \sqrt{E-V}\ \overline{ds}$ であたえられた場合には，直交性は通常の意味での直交性であるから幾何学的差異が表に出てくることはない．しかし，一般には光線と波面の直交性は，ユークリッドの意味での直交性を含んでいない．

力学的に可能な軌道が，「光線に類似の性質」を持っていることは決して自明なことではない．2次元以上の空間での曲線群は，面群に垂直な軌道の集まりと見なすことはできない．力学の軌道が光線に似た性質を持つのは，変分原理から導くことができるときだけである．最小作用の原理が成り立たないなら，力学的軌道の光に類似した性質を定式化することはできないのである．

可能な軌道の中で特定の条件を満たすものだけを選んで考察したので，どのような条件があるとき軌道が光線の性質を示すかを明らかにしておかなければならない．媒質中の光線は2次元多様体を作っているが，力学的軌道は5次元多様体を作る．この軌道は，面上のどの点からも任意の初速度で発進することができる．それ

らの中からエネルギーが同じでありかつ面に垂直なものを選び出したとする．光線に類似の性質はこれらの軌道だけが持っているにすぎない．力学の軌道は互いに交差することのない曲線群である．一定の条件のもとで軌道群を選び出したときにも，性質を異にする軌道が偶然に混じってこないとも限らない．しかし，1本の光線というものは単独には存在できず，いつも光の場の一部として存在しているのである．

電子顕微鏡で電子は光学的な像を結ぶ．カソードの温度がどこでも同じなら同じエネルギーの電子がカソードから放出される．カソードには強い電場が加えられているので電子はカソード面に垂直方向に飛び出すものと考えてよい．この二つの条件からの外れの度合いに応じて光学像がぼやける．以下で示すようにエネルギーの乱れは光学的球面収差と同じ現象を生み出す．

力学的軌道の光線的性質は，力学と光学の類似性の一部でしかない．ホイヘンスの原理によって光波面を作図することに対応する事柄が力学にもある．事実，ホイヘンスの原理における無限小の扱い方は，光学の場合にハミルトンの偏微分方程式を導出した方法と同じである．無限小の距離に限って考えると，ホイヘンスの原理は次のように表現できる．任意の光波面を考え時刻 $t=0$ においてその面に僅かな乱れが生じたとする．$t=\varepsilon$ での光波面は，$t=0$ の光波面から求めることができる．求め方は図20と全く同様である．点 P での光速を v とすると，

$$\sigma = \varepsilon v \tag{87.13}$$

となる．媒質が不均一ならば光速は各場所で異なる．そこで

$$v = c/n(x, y, z) \tag{87.14}$$

としよう．ここで $n(x, y, z)$ は媒質の「屈折率」であり，c は真空での光速である．もし，屈折率 $n(x, y, z)$ がどの点でも分かっているものとすると，$t=0$ の面のすべての点から無限小の距離

$$\sigma = \varepsilon c/n \tag{87.15}$$

にある光波面を作図することができる．この手続きは次つぎと繰り返すことができる．最終的には，空間を

$$\phi(x, y, z) = C \tag{87.16}$$

で表された無数の光波面で覆い尽くすことができる．この関数 $\phi(x, y, z)$ が前に論じた関数 S である．関数 $\phi(x, y, z)$ は光が $\phi=0$ の光波面から点（x,

y, z）に到達するに要する時間である．隣接する光波面の距離 σ と関数 ϕ の勾配の間には（87.9）の関係があるから，ϕ の方程式は

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = \frac{n^2}{c^2} \tag{87.17}$$

であたえられることになる．ホイヘンスの原理を表現しているこの偏微分方程式は，Hamilton が最初に提案したものである．

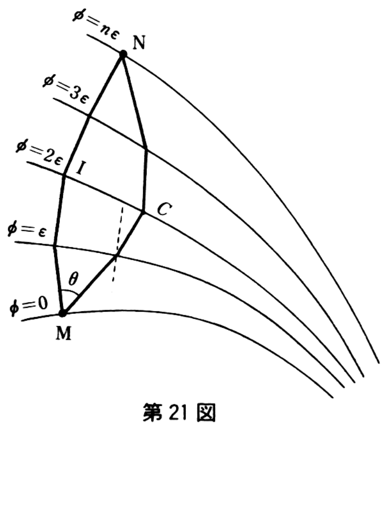
力学の場合の偏微分方程式（87.17）に該当する式は，（87.5）式であった．この方程式をホイヘンスの原理に照らして考えることもできる．（87.5）式と（87.17）式の右辺を比較してみると力学問題も屈折率が

$$n/c = \alpha\sqrt{2m(E-V)} \tag{87.18}$$

であたえられる仮想媒質の光学の問題に関係付けられることが分かる．ここで，α は任意定数である．

歴史的に見ると，物理学がやっと研究し始められ，高等数学の手法が辛うじて使えるようになり始めたころ，John Bernoulli が屈折率は $\sqrt{E-V}$ に比例すると仮定して重力場での粒子の運動を光学の問題として考察したことは実に驚くべきことである．

ここまでの議論においてわれわれは，波面の概念を強調し，光の軌道も粒子の軌道も波面に垂直であるとしてきた．次に，軌道を決定する最小原理は波面



第21図

の偏微分方程式からどのようにして決定されるかを示そう．図21に示した波面 $\phi=0$ の点Mから波面 $\phi=n\varepsilon$ の点Nに達する各面に直交した軌道Tに沿って伝播する光について考察する．点Mから出て点Nに達するもう一つの軌道C（この軌道は，面に直交していない）を考えてみよう．作図法から分かるように，光が軌道Tに沿って点Mから点Nに達する時間は

$$t = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\cdots) \tag{87.19}$$

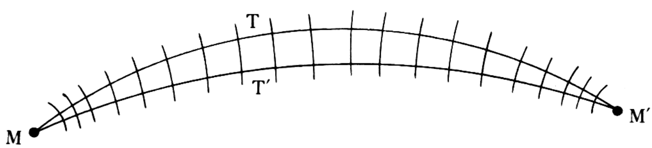
であたえられ，軌道Cの場合には

$$t' = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{\cos\theta_1}+\frac{\varepsilon}{\cos\theta_2}+\cdots\right) \tag{87.20}$$

である．ここで θ は，軌道と波面の法線のなす角である．(87.19) は正の数ばかりの総和であり，(87.20) 式の対応する項はどれも等しいかより大きい数値であるから

$$t' > t \tag{87.21}$$

であることが示される．これはフェルマーの「最短時間の原理」である．点Mから点Nに達する光の軌道は所要時間が最短のものである．



第22図

以上の考察からフェルマーの原理は光の軌道とそれに近接する変分軌道を比較することで（停留値問題ではなく）最小値を決定している原理であると思われるかも知れない．しかし，上の導出法では軌道Tに沿うどの波面も確定していると仮定している．ときには，図22に示すような事態が起きるであろう．点Mを発した光束を考えてみよう．点Mの近くではこの光束は広がるけれど再び収束しても差し支えないし，点 M′ の近傍では軌道が交差することがあってもよい．そんな場合は，点 M′ を含む波面は直線状か1点に収縮している（光学では，すべての点光源からの光の波に対して波面が1点に集まる像 M′ が対応する）．局所的には最小値をとるとい

う上記の結論は，点 M′ までならば成り立つがこの点より先では，近傍の軌道はどの波面とも接することのない領域に伝播していくのでもはや成り立たない．したがって，角度が実数であるということも成り立たなくなってしまう．その結果，$t'>t$ もいえなくなる．このことに対応して力学系では，点 M′ 軌道Tに沿った点Mの「運動学的焦点」と呼ぶ．この焦点より先の方では最小作用の原理の「最小性」も損なわれることになる．

《問題 13》 球面上の自由粒子の運動を考察せよ．点Mと反対の極である「運動学的焦点」を越えると作用はもはや最小ではないことを示せ．

《問題 14》 地球の重力場で，エネルギーの等しい多数の粒子が点Mからいろいろの方向に飛び出したときの運動学的焦点を求めよ．この焦点の前後での最小作用の原理の最小値性について考察せよ．

所要時間 t を最小にするとは，定積分

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\overline{ds}}{v} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{n}{c}\overline{ds} \tag{87.22}$$

を最小にすることである．したがって，光学の現象を記述する二とおりの原理が得られる．偏微分方程式（87.17）を解いて関数 ϕ を決め，波面に垂直な軌道を作図するという波面の原理を利用することができる．あるいは，積分（87.22）を最小にするというフェルマーの原理を用いることもできる．これら二つの原理は全く同等である．

同様の同等性は，力学現象にも見られる．われわれは，偏微分方程式（87.5）を解いて関数 S を求め，S＝一定の波面に直交する力学的軌道を定義することができる．また，フェルマーの原理（87.22）に対応する最小原理を用いることもできる．対応関係（87.17）が成り立つことを考慮すると，この原理は定積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2m(E-V)}\ \overline{ds} \tag{87.23}$$

を最小にする形式をとることが分かる．これは，ヤコビの原理（第5章§6）に他ならず，最小作用の原理と同等である．力学ではヤコビの原理を，光学ではフェルマーの原理を想定しておけば力学と光学の現象の類似性が理解できよう．ヤコビの原理を用いると保存力学系には屈折率が $\sqrt{E-V}$ に比例する光学系に関係つけると，力学現象を光学の原理を用いて解明することができる．

光学の問題に対しては，ハミルトンの正準方程式が有効である．ホイゲンスの波面の作図法は，光学の手法から力学の手法に翻訳することができる．

このことによりハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の特解によって定義される関数 S に新たな意味が付与される．偏微分方程式の完全解は，数学的に解釈することはできた．すなわち，完全解は正準変換の母関数であった．しかし，特解としての関数 S は，はっきりした物理的意味を持っている．関数 S は，光が一つの波面から他の波面に到着する時間をあたえる関数 ϕ に似ている．所要時間は波面に垂直な軌道に沿って測られ，積分 (87.22) であたえられる．力学の場合の対応する積分は (87.23) 式であたえられ，エネルギー面に垂直な軌道に沿って積分される．この作用を点 (x, y, z) の関数として表現すると，関数 S が求められる．S=一定の面は，等作用面であり，$S=0$ を規準に測られる．

関数 S の物理的意味をこのように理解してみると，関数 S はハミルトンの主関数の役割を暗示していることが分かる．唯一の違いは，関数 W においては面からではなく1点から出発する点である．作用は，点 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ に始点を持つ任意の軌道に沿って進み点 (x, y, z) を終点に持つ．これに対して，上で考察した関数 S は規準面から出発しその面に垂直な軌道に沿って進む．

光学・力学アナロジーの次の特徴は注目に値する．光の場は，同一の点に異なる周波数の光の波を重ね合わせることができる．このことは屈折率が場所の関数である場合に起きる．この現象は「分散」と呼ばれる．この場合には規準波面 $\phi=0$ は，いろいろの方向に異なる周波数で伝播し，このことが光学系設計の際「色収差」として問題になる．力学系にもこれに類似した現象が見られる．規準面 $S=0$ から垂直な方向に出た軌道は，エネルギーの値が異なっていることもある．熱運動のために初期値に揺らぎが見られる電子顕微鏡の場合がこの例に当たる．電子顕微鏡では，電子線の分散と色収差の現象が見られる．

光学・力学アナロジーにおいて，光の伝播時間と作用は対応した概念である．規準面から出発して相継ぐ短い時間間隔をパルスとして伝播する無数の波面を考えることができよう．この波面群に対応する力学的な面は<u>等作用面</u>である．光学と力学の類似性は，力学<u>軌道</u>と<u>光線</u>にのみ関することである．運動の

時間的経緯は，全く異なる法則に従っているのである．規準面から垂直に出た粒子群は，同じエネルギーを持っていたにしても等作用面に留まってはいない．近接する波面の間に（87.13）の関係があるならば，等作用面に留まることができるであろう．しかし，$\sqrt{2m(E-V)}$ は運動量 mv に等しいから，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式を考え合わせると，力学の場合（87.13）式は次のように書かなければならない：

$$\sigma = \varepsilon/mv \tag{87.24}$$

二つの波面の間隔は速度に反比例している．したがって，同一時刻に粒子群の位置の作る面は等作用面ではない．

光線追跡からだけでは，光の粒子説か波動説かの判定はできない．反射と屈折の法則は，力学を用いて説明することができる．しかし，粒子説による屈折の法則は

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_2}{v_1} = 一定 \tag{87.25}$$

であることを示すが，波動説は，

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = 一定 \tag{87.26}$$

であることを主張する．二つの理論の正しさの判定は，水中と空中での光速を比較すること（フーコーの実験）で下された．光の粒子説は，実験結果と逆の結論を予言していた．

《問題 15》 光学と力学の類似性の議論で粒子の質量を1と置き，光速を1と置いてみる．このとき，（87.18）式は，$n=v$ と書ける．光学媒質の屈折率の急激な変化は，ポテンシャル・エネルギーの急激な変化に対応する．この振舞いを境界では連続的に変化しているポテンシャルで近似し，反射と屈折の法則を力学的に説明せよ．

《問題 16》 屈折率が場所の関数として連続的に変化しており，このことに対応してポテンシャル・エネルギー $V(x, y, z)$ も連続的であるとする．このとき，屈折の法則は

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

となることを示せ．また，この法則は，力学法則

$$mv^2/\rho = F_n$$

に従う光線の曲率を決めることを示せ．F_n は力の主方向成分，ρ は曲率半径とする．

《ま と め》 保存力学系の経路は，ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式の特解を求め，S＝一定の面に直行する軌道を作図する方法で求められる．この作図法は，幾何光学の波面の作図と同じである．光学では同一時刻の波面は，力学の場合の等作用面に類似している．フェルマーの所要時間最小の原理は，力学の最小作用の原理，あるいは，ヤコビの原理に対比される．光学現象も力学現象も波動としてでも粒子としてでも同じように扱うことができる．波動像を用いるときには，ハミルトンの偏微分方程式に従う無限個の波面群を用いる．粒子像を用いる場合には，フェルマーの原理とヤコビの原理に従う波面群に直交する軌道群が用いられる．この類似性は，力学的軌道に関してだけ成り立っているにすぎず，運動の時間経緯にまで関するものではない．この類似性を利用すると，可能なすべての力学的軌道の中から面に垂直なものだけが選び出せる．

§ 8. 波動理論におけるハミルトンの偏微分方程式の意義

光学の場合のハミルトンの偏微分方程式 (87.17) は，ホイヘンスの原理を表現していることはすでに示した．ホイヘンスの原理は，波動論を基礎にしてはいるけれども，波動面の作図法は幾何光学に基づいており物理光学の方法ではない．ハミルトンの偏微分方程式と物理光学の関係をより深く分析するには，波面の定義を少し変更しなければならない．前節では，波面は幾何光学での光の伝播と関係付けて考察した．しかし，物理光学では，それらの波面は決まった周波数の光波の伝播にとっても重要である．この場合には，波面は<u>等位相面</u>として定義され，伝播速度は位相角 ϕ が波面に垂直に伝播するときの速度である．

周波数 ν の波は方程式

$$u = Ae^{i2\pi[\nu t - \bar{\phi}(x,y,z)]} \tag{88.1}$$

で表すことができる．ここで，u が擾乱，A は振幅，ν は周波数，そして，$\bar{\phi}(x, y, z)$ は位相角を表す．

この描像での波面は方程式

$$\bar{\phi}(x, y, z) = 一定 \tag{88.2}$$

で特徴付けられる．定位相の波の伝播は

$$\nu dt - d\bar{\phi} = 0 \tag{88.3}$$

あるいは，

$$d\bar{\phi} = \nu dt \tag{88.4}$$

の関係が成り立つことを必要としている．この方程式は，二つの波面の間を光が伝播するに要する時間が $d\phi/\nu$ であることを示す．一方，前節の $\bar{\phi}$＝一定の波面に関係した所要時間は $d\bar{\phi}/\nu$（(87.16) 参照）であった．したがって，$\bar{\phi}$ の満たすべき偏微分方程式は

$$\bar{\phi} = \nu\phi \tag{88.5}$$

と置くだけで，(87.17) 式から得られ，ハミルトンの偏微分方程式は

$$|\mathrm{grad}\bar{\phi}|^2 = \nu^2 n^2/c^2 = 1/\lambda^2 \tag{88.6}$$

であたえられる．λ は波長である．

$\bar{\phi}$ を位相関数と解釈すると，ド・ブロイの物質波の発想に近づくことができる．物質の運動と光の伝播には大きな違いがあるけれども，あえて光学と力学の類似性こそが物理的真実なのだと仮定してみよう．電子が粒子であるということはひとまず置き，電子の運動経路を一種の光線であると考える．この経路は，原子核の周りにおいて閉軌道である．仮に，閉軌道に沿って 1 点の近傍で運動している振動があったとすると，振幅の合成が見られるであろう．もし帰りの振動が往きの振動とおなじ位相でなかったならば，振幅は打ち消されてゼロになるであろう．一方，帰りの振動と往きの振動の位相差が 2π の整数倍であるときは共鳴が起こり振幅は大きくなる．位相角を $2\pi\bar{\phi}$ と置いたので，閉軌道が消滅してしまわないためには次の選択則が成り立っていなければならない：

$$\Delta\bar{\phi} = n \qquad (n：整数) \tag{88.7}$$

これに対して，アインシュタインの量子条件（(84.28) 式参照）は

$$\Delta S = nh \tag{88.8}$$

であたえられた．光学と力学の類似性の視点に立てば，位相角 ϕ が作用 S に対応していることが分かる．ここで，

$$\bar{\phi} = S/h \tag{88.9}$$

と定義すると，アインシュタインの量子条件は共鳴条件 (88.7) からの結果として自然にかつ十分なものとして理解できよう．

関数 S と $\bar{\phi}$ を決定する偏微分方程式 (87.5) と (88.6) を比較してみると，運動

している電子には

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2m(E-V)}{h^2} = \frac{m^2v^2}{h^2} \tag{88.10}$$

で決められる波長が付随していると結論される．この式は，ド・ブロイの物質波の波長を決定する式

$$\lambda = h/(mv) \tag{88.11}$$

と同じである．ド・ブロイの物質波概念は，原子物理学の発展に決定的な貢献をした．

光学のハミルトンの偏微分方程式は，ホイヘンスの原理と同等であった．しかし，ホイヘンスの原理は物理光学の法則から近似的に導かれた原理である．光の振舞いは，ベクトルを用いたマックスウエルの方程式で完全に記述される．もちろん，スカラー量だけを用いるフレネルの理論でもうまく説明できる現象も少なくない．そこで，フレネルの方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{88.12}$$

を満たしている場の量 $\phi(x, y, z, t)$ について考察することにしよう．1階微分の2次形式であったハミルトンの偏微分方程式 (88.6) と違って，この方程式は2階の線型微分方程式である．これら二つの方程式の間の関係について調べてみよう．

まず，周波数 ν の光の振動が発生したと仮定する．このとき，ϕ は

$$\phi = e^{2\pi i\nu t}\psi(x, y, z) \tag{88.13}$$

の形で表すことができる．$\psi(x, y, z)$ は「波動関数」と呼ばれる．この関数を決定する方程式（「波動方程式」である）は

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi = 0 \tag{88.14}$$

であたえられる．(88.13) 式と (88.1) 式を比較すると，波動関数 ψ と位相関数 $\bar{\phi}$ の間には，

$$\psi = e^{-2\pi i\bar{\phi}} \tag{88.15}$$

の関係があることが分かる．(88.15) 式を波動方程式 (88.14) に代入すると ϕ の方程式

$$|\mathrm{grad}\overline{\phi}|^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial z^2}\right) \tag{88.16}$$

が導ける．右辺の第2項は，λがゼロに近づくとき第1項に比較して無視することができる．したがって，光学におけるハミルトンの偏微分方程式は，短波長（あるいは，周波数が大きい）の場合のフレネルの波動方程式と同等である．短いけれども有限の波長ならば，ハミルトンの偏微分方程式は一つの近似式であり，(*88.16*) 式ないしは (*88.14*) 式で置き換えなければならない．

1927年に，Schrödinger は，ハミルトンの微分方程式に潜んでいる光学・力学アナロジーにとどまらない非常に独創的なアイデアを発表した．彼は位相関数 $\overline{\phi}$ を波動関数ψで置き換えた．振幅に対する方程式 (*88.14*) にド・ブロイ波 (*88.10*) を用いると，Schrödinger 方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \tag{88.17}$$

が得られる．これが波動力学の基礎方程式である．古典力学から波動力学への大きな発展は，次に上げる画期的仕事によっている：分離型の多重周期系に関するドロネーの研究；ゾンマーヘルド・ウイルソンの量子条件の理論；Einstein による量子条件の不変性に関する研究；de Broglie によるアインシュタインの量子条件の共鳴現象としての意味付け；Schrödinger による位相関数から波動関数への視点の移動：.

《ま　と　め》 光が伝播するときの波面は，同位相の面として定義することができる．光学におけるハミルトンの偏微分方程式は，定常的な光の場の位相角の振舞いを決める．この偏微分方程式は，フレネルの波動方程式と関係している．このことは，近似的に成り立つことであるが，短波長ないしは高周波数の極限では厳密である..

§ 9. 力学の幾何学化：非リーマン幾何学．ハミルトンの偏微分方程式の計量的意味

力学原理を深く理解する上で幾何学的描像がどれほど重要であるかを見てき

た．リーマン幾何学的配位空間を用いると，どんな力学系の運動も，多次元空間の1点の運動として表すことができる．このようにして1粒子の運動原理をそのまま任意の力学系の原理にまで拡張することができた．

外力の働いていない力学系では，幾何学的描像が特に有効である．この場合，軌道は配位空間の測地線と見なす（ヘルツの原理）ことができる．さらに，ポテンシャル・エネルギーが時間 t に依存していないならば，線素は新しく

$$\overline{d\sigma} = \sqrt{E-V}\ \overline{ds} \tag{89.1}$$

と定義することもでき，一つの E に属するどの軌道も測地線になっている．ここで，$\overline{ds}$ は，配位空間での元来の意味での線素である．しかし，すべての力学系が保存系であるとはいえない．また，外力の仕事関数（ポテンシャル）が座標だけの関数でない場合もある．例えば，電磁場中の電子に働く力は，速度 $\dot{q}_i$ にも関係しているし，時間に依存する場合もある．したがって，この例では，ポテンシャル・エネルギーが時間と速度に依存しないという条件を満たしていない．そのうえ，古典力学から相対性理論の領域に移ると，リーマン計量の線素と関係していた運動エネルギーの形式も変わってくる．

こうした一般的な場合にも力学と幾何学の密接な関係は保存されている．リーマン幾何学だけが計量的な幾何学ではない．リーマン幾何学は，どの点の近傍も平坦な空間の幾何学であり，無限小の領域ではユークリッド的である点で他の幾何学と区別される．しかし，直線と角度だけで幾何学を構成するときには平坦であるという制限は取り除くことができる．力学の問題を一般的に定式化する観点からすると，線素 $\overline{ds}$ がリーマン的でないようなもっと一般的な幾何学にも注意を払う必要がある．

以下の議論では，時間 t が通常の力学の扱い方におけるように特別の変数であるとする立場をとらない．時間 t も

$$t = q_{n+1} \tag{89.2}$$

と定義される位置座標の一つであるとし，どの変数 q_i も平等に扱うことにする．断らない限り，添字 i は1から $n+1$ までとする．この空間での線素は

$$\overline{ds} = F(q_1, \cdots, q_{n+1}\,;\, dq_1, \cdots, dq_{n+1}) \tag{89.3}$$

で定義される．関数 F は，$2n+2$ 個の変数の関数であり，変数 dq_i に関しては

1次同次形式であるという制限を加えておく．この条件は

$$F(q_1, \cdots, q_{n+1}, \alpha dq_1, \cdots, \alpha dq_{n+1}$$
$$= \alpha F(q_1, \cdots, q_{n+1}, dq_1, \cdots, dq_{n+1}) \quad (89.4)$$

と書くことができる．

パラメータ τ を用いたとき，

$$q_i = f_i(\tau) \quad (89.5)$$

で表される空間の任意の曲線を考える．条件 (89.4) を満たしていなければならないから，線素は

$$\overline{ds} = F(q_1, \cdots, q_{n+1}\,;\, q'_1, \cdots, q'_{n+1})d\tau \quad (89.6)$$

と書くことができる．したがって，測地線の問題（すなわち，2点間の長さを最小にする問題）は，次の積分を最小にする変分問題である：

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F(q_1, \cdots, q_{n+1}, q'_1, \cdots, q'_{n+1})d\tau \quad (89.7)$$

この変分問題は，パラメータ τ として $q_{n+1} = t$ を選んでおけば少し異なる定式化ができる．このときの測地線の方程式は

$$q_i = f_i(t) \quad (89.8)$$

であり，関数 $f_i(t)$ は積分

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F(q_1, \cdots, q_n, t, q_1, \cdots, q_n, 1)dt \quad (89.9)$$

を最小にする条件から決定される．この問題は，ラグランジュの関数 L の時間積分を最小にするという条件によって力学系の運動の解を求める通常のラグランジュ形式の問題に他ならない．すなわち，関数 F がラグランジュの関数と見なされるのである．

今度はこのことを逆にたどってみよう．ラグランジュの関数

$$L = L(q_1, \cdots, q_n, t, \bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n) \quad (89.10)$$

で記述される力学の問題から出発すると，$n+1$ 次元空間の線素 $\overline{ds}$ は

$$\overline{ds} = L\left(q_1, \cdots, q_{n+1}, \frac{dq_1}{dq_{n+1}}, \cdots, \frac{dq_n}{dq_{n+1}}\right)dq_{n+1}$$
$$= F(q_1, \cdots, q_{n+1}, dq_1, \cdots, dq_{n+1}) \quad (89.11)$$

によって定義することができる．力学の問題は，$n+1$ 次元空間での測地線を求

める問題に書き換えられる．すなわち，運動方程式を解く問題と測地線（一般には非リーマン的である）を求める問題とは同等である．

力学を幾何学的に説明する場合，ハミルトンの主関数が特別な意味を持っている．幾何学的には，「作用」は「弧の長さ」として，また「最小作用」は「最短の長さ」と解釈されるから，ハミルトンの主関数はこの空間での2点（$q_1, \cdots, q_{n+1}$）と（$\overline{q}_1, \cdots, \overline{q}_{n+1}$）の間の距離という明確な意味を持っている[3]．

この解釈によると，ハミルトンの主関数がなぜ偏微分方程式で規定されているかを理解することができる．空間の2点の座標の関数であればどのような関数でも距離の定義として用いることができるわけではない．距離とは「最短の距離」のことであり，「最短」とは適当に定義された距離に対して用いられる形容詞ではない．幾何学の視点から問題を考えるとき，ハミルトンの主関数に重要な意味を与えることができる．新しい解釈とはどんなものかを説明するために，変分問題（89.7）を正準変換に書き換えることから始めよう．運動量を

$$p_i = \partial F/\partial q_i' \tag{89.12}$$

と定義し，ハミルトンの関数を求めておく．しかし，関数 F は q'_i の1次同次式であったから，

$$H = \sum_{i=1}^{n+1} \partial F/\partial q_i' q_i' - F = 0 \tag{89.13}$$

が成り立つ．このように，ハミルトンの関数がゼロになるときには，

$$K(q_1, \cdots, q_{n+1}, p_1, \cdots, p_{n+1}) = 0 \tag{89.14}$$

の恒等的関係式が常に存在することはすでに述べた．この恒等式は，積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Sigma p_i dq_i \tag{89.15}$$

の停留値を求める変分問題の付加条件である．

《問題17》　線素がユークリッド的であり

$$\overline{ds} = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

---

3)　この見方からすると，Hamilton の用いた主関数 S はいささか暗示的な意味合いを持っている．最近 Hamilton の記号が用いられなくなっている理由は正準変換の母関数（ヤコビの意味）として用いられているからである．Hamilton と Jacobi の理論は根本のところで違いがあり，ハミルトンの主関数には別の記号を用いた方がよいと思われる．

と定義された場合の運動量 p_i は「方向余弦」であることを示せ．このとき (89.14) 式は

$$\Sigma\alpha_i^2 = 1$$

を意味する．したがって，どんな計量空間で定義された「運動量」p_i もこの空間での「一般化された方向余弦」と見なすことができる．方向余弦は全部が独立ではなく，(89.14) 式により互いに関係している．

次に，考えている空間での任意の面

$$f(q_1, \cdots, q_{n+1}) = 0 \tag{89.16}$$

について考察する．まず，この面の法線を求めよう．そのためには，面外の点 $\overline{q}_1, \cdots, \overline{q}_{n+1}$ から面に垂線を下ろしてみる．われわれの問題は，この点から最短に距離にある面上の点を求めることである．このためには，付加条件 (9.16) の下で関数 $W(q_i, \overline{q_i})$ を最小にすればよい．この最小値問題の解は

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} - \lambda\frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \tag{89.17}$$

を解いて得られる．ハミルトンの主関数の性質から

$$p_i = \lambda\partial f/\partial q_i \tag{89.18}$$

が得られる．この解は，法線の方向余弦は f の勾配であることを示している．因子 λ は，次の意味を持っている．(89.13) 式は

$$\Sigma p_i dq_i = \overline{ds} \tag{89.19}$$

と書くこともできるから，(89.18) 式を利用すると

$$\overline{ds} = \lambda\Sigma\frac{\partial f}{\partial q_i}dq_i = \lambda df \tag{89.20}$$

が得られる．この結果から

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{df}{\overline{ds}} = |\mathrm{grad}\, f| \tag{89.21}$$

が導ける．したがって，$1/\lambda$ は f の法線方向の勾配，すなわち，この点で最も早く変化する割合に等しい．法線の方程式 (89.18) は，結局

$$p_i = \frac{1}{|\mathrm{grad}\, f|}\frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{89.22}$$

と書かれる．p_i の式 (89.18) を (89.14) 式に代入すると

$$K\left(q_1, \cdots, q_{n+1}, \lambda\frac{\partial f}{\partial q_1}, \cdots, \lambda\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right) = 0 \tag{89.23}$$

が得られ，この条件式から λ の値が求められる．

《問題 18》 線素はリーマン的であるとする：

$$\overline{ds} = \sqrt{\sum a_{ik}dx_i dx_k}$$

関数 $f(x_i)$ の最も早い変化の割合は

$$|\mathrm{grad}\, f| = \sqrt{\sum b_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k}}$$

であることを示せ．行列 b_{ik} は行列 a_{ik} の逆行列である．

λ の値を求め関数 f の最も早い変化の割合を求める方法は，ハミルトンの偏微分方程式を求める方法と同じである．ハミルトンの方法では，p_i は $\partial W/\partial q_i$ で置き換えられ，関数 W の条件式が求められた．ここでは，関数 f は任意の関数でもかまわない．(89.23) 式は，任意の関数の最も早い変化の割合を求めるのに利用できる．したがって，ハミルトンの偏微分方程式は，条件

$$\lambda = 1 \tag{89.24}$$

としたものと同等である．この式は

$$|\mathrm{grad}\, W| = \left(\frac{dW}{ds}\right)_{\max} = 1 \tag{89.25}$$

に他ならない．

主関数 W の幾何学的意味は，きわめて自然なものである．W＝一定の面はどれも共通の中心 $\overline{q_i}$ をもつ同心球面である．半径ベクトル R は，どこでも球面に垂直である．したがって，動径方向に進むことは面の法線方向に進むことである．また，半径ベクトル R の長さを W と定義したから次の等式が成り立つ：

$$|\mathrm{grad}\, W| = \left(\frac{dW}{ds}\right)_{\max} = \frac{dr}{dr} = 1 \tag{89.26}$$

半径ベクトルは球面にいつも垂直であるという幾何学的性質は，ユークリッド空間に限られた性質ではないことに注意しておこう．この性質は，いかなる計量空間でも成り立つ不変性の一つである．

(89.26) 式は，ハミルトンの偏微分方程式

$$K\left(q_1, \cdots, q_{n+1}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_{n+1}} \right) = 0 \tag{89.27}$$

と同等である．境界条件を問題に応じて設定すれば，この式からハミルトンの主関数 W が求められる．境界条件は，関数 W を 2 点，$\overline{q_i}$ と q_i の間の最短距離に等置できるために設定される．いま，2 点は近接しているとして

$$q_i = \overline{q_i} + dq_i \tag{89.28}$$

とする．この 2 点間の距離は (89.3) であたえられる線素 ds に等しい．したがって，

$$\begin{aligned} &W(q_1, \cdots, q_{n+1}, q_1 - dq_1, \cdots, q_{n+1} - dq_{n+1}) \\ &\qquad = F(q_1, \cdots, q_{n+1}, dq_1, \cdots, dq_{n+1}) \end{aligned} \tag{89.29}$$

なる条件が得られる．境界条件 (89.29) の下で微分方程式 (89.27) がハミルトンの主関数を一意的に決定する．

境界条件 (89.29) の下では，点 $\overline{q_i}$ が点 q_i の近接点であるなら距離を表す関数Wとして

$$W = F(q_1, \cdots, q_{n+1}, q_1 - \overline{q_1}, \cdots, q_{n+1} - \overline{q_n}_{+1}) \tag{89.30}$$

を得ることができる．もし，F は q_i に依存していないならば

$$\overline{ds} = F(dq_1, \cdots, dq_{n+1})$$

とすることができる．測地線問題においては，どの変数 q_i も循環変数であるから，いつも完全解が存在する．その解は，

$$W = F(q_1 - \overline{q_1}, \cdots, q_{n+1} - \overline{q_n}_{+1}) \tag{89.31}$$

であり，この式から，積分の手続きを経なくとも単に引算だけで<u>任意の</u> 2 点間の距離を求めることができる．この空間は一様空間であり，どの点の近傍も同じ性質を持っている．しかし，等方的ではなく空間の性質は方向依存性を持つ．この空間では，図形の位置の変位は可能であるが一般には回転が許されない．

《問題 19》 ユークリッド空間の距離を (89.32) 式を用いて線素 $\overline{ds} = \sqrt{\sum dx_i^2}$ から計算せよ．

《問題 20》 自由質点 m の主関数を求めよ．その結果は，§ 5 の問題 8 の結果において g=0 と置いたものと同じであることを確かめよ．

《問題21》 この節での空間では，汎関数行列式に対する条件 (*5.6*) は満たされていることを確かめよ．

§7では，光学と力学の類似性について考察した．S=一定，ϕ=一定で決まる波面を作図し，波面に垂直な軌道が力学の軌道でもあれば光の進む道でもあることを見てきた．そこでの議論は，速度依存性を持たない外力場の下での粒子の運動に限定したものであった．この制限は取り除くことができる．どんな場合でも力学系に固有の幾何学を導入しさえすれば光学と力学の類似性が議論できることを以下に示そう．

(*89.24*) 式と (*89.25*) 式を用いると，関数 S の微分方程式は幾何学的には次のように書くことができる：

$$|\mathrm{grad}\, S| = 1 \tag{89.33}$$

この方程式は，次のような幾何学的内容を持っている．S=一定の面上のすべての点は，規準面 $S=0$ から等距離にある．したがって，S=一定の面は，平行な面の集まりである．「等作用面」はここでは「等距離面」，すなわち平行な面である．

力学軌道（同様に，光の経路）が S=一定の面に垂直であることも簡単に確かめられる．この章の§7において，変換方程式の第1の組

$$p_i = \partial S/\partial q_i \tag{89.34}$$

を解けば，波面から力学軌道が求められることを示した．(*89.33*) 式を考慮すると，この方程式は

$$p_i = \frac{1}{|\mathrm{grad}\, S|}\frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{89.35}$$

であり，これを使って S=一定の面の法線の方程式の性質を調べることができる．力学軌道が波面に直交することは容易に確かめられる．

この定理は，前に定式化したものよりも一般性を持っている．先に扱った定理では，軌道と波面の直交性はユークリッド的な意味にとっていた．しかし，ここで示した定理では力学系に固有の非ユークリッド幾何学（もっと一般的には，非リーマン幾何学）において成り立っている．先に証明した方法が正当なものであったのは，線素としてユークリッド的な線素 (*89.1*) に比例するとしたいわば偶然性にあったのである．

《問題 22》 法線の方程式は，$\overline{ds}$ に適当な因子 $\alpha(q_1, \cdots, q_{n+1})$ を掛けておいても変わらないことを示せ．

もっと一般的な場合（電磁場中の電子の運動，非保存力学系，相対論的力学系，結晶中の光等），系の力学的性質に関係している線素と通常の意味での（ユークリッド的）線素とは，もはや比例してはいない．それにもかかわらず，軌道と波面の直交性はもっと深い意味において成り立っているのである．

力学系が本来的に備えている幾何学の視点から力学の問題を考察すると，波面と軌道の間にはもっと密接な関係があることに気付く．すなわち，非常に一般的に，われわれはそこに一様媒質中の光の伝播と全く同様の状況を見いだす．光線の経路はそこでは直線，すなわち，最短の曲線（ないしは，測地線）である．ホイヘンスの作図法では，無限小領域だけでなく有限の大きさの領域でも波は球面波である．球面波の包絡面は平行であり，光線（同様に，力学軌道）はこれらの平行な面に垂直に走る．こうした描像は，どんな光学系でも力学系でも適当な幾何学を導入しさえすればいつでも描けるのである．

平行な面群に垂直な軌道は，いつでも測地線であることを最初に示したのは Gauss であった（「曲がった面の一般的研究」，1827 年）．当然のことであるが，彼が用いた計量はリーマン的なものに限られていた．上に示した定理は，どのような計量空間においても成り立っている．

非リーマン幾何学は，結晶中での光学現象を記述するときに現れる．この場合の線素は，次の式であたえられる；

$$\overline{ds} = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}/v \tag{89.36}$$

光の速度 v は，フレネルの式

$$\frac{dx^2}{v^2-v_1{}^2}+\frac{dy^2}{v^2-v_2{}^2}+\frac{dz^2}{v^2-v_3{}^2} = 0 \tag{89.37}$$

の解としてあたえられる．v_1, v_2, v_3 は「主方向速度」である．この方程式は v の 2 次方程式であるから一般には二つの根が存在することになり，一つの問題に二つの測地線が共存することになる．このことを反映して，入射光は結晶中では二つの波（偏光が異なる）にわかれて伝播する．これが複屈折現象である．ホイヘンスの理論では，適当に幾何学を選んでおけば球面波として扱うことができる性質の波ではあ

るが，複雑な4次の波面の二つの組を用いなくてはならない．

《問題23》 フレネルの理論において，$v_1 = v_2$ と置く．この場合，z 軸に関しては回転対称性があり，結晶は単軸性となる．計量の一つは，ユークリッド的であり波面群はユークリッド的な球面波であることを示せ．異常光の幾何学を決める距離の表式は

$$W = \frac{(x-\overline{x})^2+(y-\overline{y})^2+(z-\overline{z})^2}{\sqrt{v_3{}^2[(x-\overline{x})^2+(y-\overline{y})^2]+v_1{}^2(z-\overline{z})^2}}$$

であたえられる．

《ま　と　め》 固有の幾何学を用いるなら，力学の問題は幾何学の言葉で完全に表現することができる．この場合の幾何学は一般にリーマン幾何学ではない．配位空間は，時間座標 t を他の座標と区別することなく同じ形式で定義される．力学の軌道はこの空間での最短曲線（すなわち，測地線）に当たり，波面はどれも平行である．測地線は，波面に垂直な軌道として作図される．力学の現象は，一様媒質中の光の伝播に対応する．

第 9 章 相対論的力学

この宇宙を一つの統一的視点にたって考えることのできる人にとって，森羅万象は無類の必然的真理と映るであろう．（ダランベール：百科事典（1751年））

§ 1. 歴史的序説

ファラデーが「力線」という概念を導入して以降，いつも一つのことが問い続けられてきた：物体が運動しているとき，力線はどのような振舞いをするのだろうか．一様運動をしている物体が作り出す電場は，その物体とともに動いて行くのだろうか．電磁波の発見者 Hertz のこの問題に対する解答は肯定的であった．しかし，Fizeau の水中での光速の測定結果は $c+v$ ではなくて，$c+(1-1/n^2)v$ であった．c は光の速さ，v は流体の速度である．n は水の屈折率である．Lorentz は「対流係数」，$1-1/n^2$，を，電荷が相対運動していても影響を受けない「静止エーテル」説で説明しようとした．この静止エーテル説では，地球（静止エーテルに相対的に運動している）上では v^2/c^2 に比例する光学的効果が観測されなければならない．この効果は実験から存在しないことが確かめられ，当時の理論物理学者は混乱の淵にあった．この混乱は，1905年の Einstein の論文「運動物体の電気力学について」によって収拾された．Einstein より先に Lorentz と Poincare も絶対速度が測定不能との実験事実が説明できなければ，理論的には不十分である点に気が付いていたが，正しい解答を得るに至らなかった．一様相対運動している座標系の同等性を証明なしに普遍的根本原理として導入したのは Einstein であった．彼は，この仮定に加えて Michelson と Morley や何人かの実験家が示した光速不変性の原理を第2の要請とした．この原理は，光速はどの座標系から見てもすべての方向で同一であることを主張する．通常の力学概念からは，この二つの仮定は矛盾し同時に

成り立つとは考えにくい．しかし，Einstein は「絶対時間」というわれわれの常識を放棄するなら，この矛盾は解決されることを示した．彼は，一様速度で相対運動している2人の観測者の時間と空間の間の関係を定式化した．その公式によると，時間 t は依然として絶対的物理量ではあるが空間座標も関与してくることになる．時間 t は，不変な量から共変な量に変わり，光速は共変な量から不変な量に変わった．

Einstein は，この変換論の方程式は観測者と相対的に運動している光源（あるいは，この逆）に関するよく知られた1次および2次の効果に完全に一致することを示した．上記の二つの要請は，ニュートンの運動方程式の変更を要求しており，ここに新しい力学法則が提案された．新理論の最も重要な結論は，従来まで別の概念とされていた質量とエネルギーが公式 $E=mc^2$ に統一されたことである．この方程式は，1905年にはまだ不完全な形式で，そして1907年に完全な形式で Einstein によって提案された．

Einstein が相対運動の効果について物理的に正しい説明を見つけることができず，数学的公式の問題にすり替えていた点は，数年後 Minkowski（1908-09年）が Einstein の二つの要請の深遠な意味を見抜くに至って解消された．Minkowski はこれらの要請は宇宙の幾何学に関した新しい構造を意味し，時間と空間が4次元空間になっていることを発見した．したがって，相対運動の効果は宇宙の幾何学の直接の結果でありどのような物理的仮説とも無関係なのである．

相対論の要請に関する実験で得られた結論によって，これらの要請は数年のうちに多くの学者の認めるところとなり，相対性理論は，物理学の最もよく実証された分野の一つになった．唯一の反対意見は，Einstein 自身によるものであった．彼は，相対性に関する第1の要請は，まだ十分に一般的ではないと考えていた．この要請は，等速運動をしている座標系に限られており，任意の運動座標系で成り立つものではない．座標系とはその性格からあくまでも補助的なものに過ぎず，絶対的意味をもつことができないはずである．座標系が特別の意味をもつような一般的概念は，物理数学から取り除かなければならない．すべての座標系の同等性の要請は，「一般相対性原理」と呼ばれる．等速運動している座標系（慣性系）の同等性の方は，「特殊相対性原理」と呼ばれる．

Einstein の理論の決定的に重要なところは，重力場のある場所では光速不変の原理が成り立たないとする点である．この結果，空間がミンコフスキー的ではなくなり，微小領域に限ればミンコフスキー的ではあるが有限の大きさの領域では曲がった空間になるよう空間を一般化しなければならないことになった．宇宙の幾何学が計量的ではあるが 4 次元ユークリッド空間から 4 次元リーマン空間に変更しなければならない．新理論は，物質の存在様式に幾何学的意味を付与するとともに，重力現象を完全に記述することができる．特殊相対性理論は時間と空間を統一し，一般相対性理論は時間，空間そして物質を幾何学的実在の形式，すなわち，4 次元のリーマン空間に統一した．

一般相対性理論は，連続体力学の概念を用いることなしには正確に論じることはできない．したがって，以下の解説は特殊相対性理論的力学に限定する．一般相対性理論の力学法則も，Lagrange と Hamilton の形式で定式化できる面もあるので幾分かは解説することになろう．

§ 2.　相対論的運動学

1905 年の論文で Einstein は，二つの基本的仮説を導入した：

（a）　定速度で相対的に運動している座標系は，自然法則を記述する上で同等であり，どちらかが特に優先されることはない．

（b）　どの座標系から見ても光速 c は普遍的定数である．

第 2 の仮定は，次のような見かけ上の矛盾を含む．Aに対して相対的に速度 c で運動している観測者Bのことを考えてみよう．観測者Bが運動方向に光の信号を送ったとすると，信号は観測者から光速 c で遠ざかって行く．従来の知識からすると，この信号速度はAから見ると $2c$ で遠ざかるはずであるが，相対性理論の第 2 の仮定は c であると主張する．これは，$c=2c$ ということで矛盾している．しかし，A, B どちらの観測者の時間も同一であるというわれわれの直観的表象を放棄しさえすれば，このことにはどこにも矛盾はないことが分かる．

Einstein は，観測者Aと観測者Bの座標系の間の関係をはじめから決めてかかってはならないと考えた．A, B の相対運動はX軸方向であるとして，

$$x = \alpha x' + \beta t'$$
$$t = \gamma x' + \delta t' \tag{92.1}$$

と仮定する．座標変換は線型であるとし，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数であるとする．$t=t'$（これは，$\gamma=0, \delta=1$ に当たる）であることを要求しないならば，われわれは四つの定数のうちのどれか二つを自由に選ぶことができる．

光速が1になる単位で時間を計ることにすると（通常の時間 t を t/c で置き換えること），特殊相対性理論の諸公式は簡潔に表される．元の時間 t に戻したいならば，t を tc で，また速度 v を v/c で置き換えればよい．以下ではこの約束を用いる．光速不変の原理は $c=1$ と書かれる．

観測者Aの座標系を (x, t)，観測者Bの座標系を (x', t') とする．Aから見たときのBは速度 $v(<1)$ で運動している．すなはち，x' を固定したとき

$$dx = \beta dt' \qquad dt = \gamma dt'$$

したがって，

$$dx/dt = v = \beta/\delta \tag{92.2}$$

となることを意味する．第2の要請からは，Aが光速で伝播する信号を観測したとするとBからも同じように観測されることが結論される．すなわち，$x=t$ であったとすると $x'=t'$ でなければならない．このことから，

$$\alpha+\beta = \gamma+\delta \tag{92.3}$$

でなければならない．光の信号は逆向きにも伝播できるから，$x=t$ とするとき $x'=t'$ となるはずである．このことから，

$$\alpha-\beta = \delta-\gamma \tag{92.4}$$

が導かれる．この二つが成り立っているから (92.1) 式は

$$x = k(x'+vt'),\ t = k(vx'+t') \tag{92.5}$$

と置くことができる．k はこれから決めなければならない定数である．この変換の逆の関係は

$$x' = \frac{1}{k}\frac{x-vt}{1-v^2}, \qquad t' = \frac{1}{k}\frac{-vx+t}{1-v^2} \tag{92.6}$$

となる．ここで，2人の観測者の座標系は全く同等であることを利用した．BがAに対して相対的に速度 v で動いているならば，AはBに対して相対的に $-v$ で動いていることになり，v を $-v$ に置き換えてもよい．二つの座標系が

同等である限り，これ以上の変更を加えることは許されない．このことから

$$\frac{1}{k(1-v^2)} = k \tag{92.7}$$

であることが要請され，定数 k は

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{92.8}$$

であたえられる．この値を用いて，座標間の関係は

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$t = \frac{vx'+t'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad t' = \frac{-vx+t}{\sqrt{1-v^2}} \tag{92.9}$$

と表される．X方向の運動は y，z 座標に関与しないと仮定してもよいからこれに

$$y = y', \qquad z = z' \tag{92.10}$$

が加わる．

速度の和

Bの座標系で速度 u

$$x' = ut' \tag{92.11}$$

で伝播している信号を考える．これを (92.9) 式に代入すると

$$x = \frac{v+u}{1+uv}t \tag{92.12}$$

が得られる．この結果は，観測者Aから見たときの信号速度は

$$\omega = \frac{v+u}{1+uv} \tag{92.13}$$

であることを示しており，ニュートンの方程式 $w=v+u$ と異なっている．これが，Einstein の速度に関する加法定理である．

Bの座標系での信号が X′ 軸に垂直な方向に伝播している場合は

$$x' = 0, \quad y' = ut' \tag{92.14}$$

であり，(92.9) 式に代入して

$$x = vt, \quad y = \sqrt{1-v^2}\, ut \tag{92.15}$$

が得られる．この結果は，通常のベクトル和の公式が成り立たないことを示している．この作図法は，それぞれの座標系で二つのベクトルの和を求めるときにだけ有効である．

フィゾーの実験では，水中での光速は

$$u = 1/n \qquad (n：屈折率) \tag{92.16}$$

であたえられる．水の流速は，vである．したがって，観測者Aから見たときの光速は

$$\omega = \frac{v+1/n}{1+v/n} \tag{92.17}$$

であたえられることが分かる．vは十分に小さい値なので，高次の項を無視する近似で

$$\omega = \left(1-\frac{v}{n}\right)\left(v+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \tag{92.18}$$

が得られる．この結果は実験結果と完全に一致しており，フレネルの「対流係数」とも一致している．

光行差

Bの座標系でX′軸とθ'の角度をなす方向に発信された光

$$x' = t'\cos\theta', \qquad y' = t'\sin\theta' \tag{92.19}$$

を考える．これを(92.9)式に代入すれば

$$x = t'\frac{v+\cos\theta'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad y = t'\sin\theta' \tag{92.20}$$

となり，これから，

$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \frac{\sin\theta'}{v+\cos\theta'}\sqrt{1-v^2} \tag{92.21}$$

が得られる．天体の運動ではv^2は1に較べて十分小さいので，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{v+\cos\theta'} \tag{92.22}$$

としてよい．したがって，地球の運動の結果，星の見える方向はvとcの通常のベクトル和で求められる値に非常に近い（ベクトルの和の大きさについては

$|v+c|$ ではなく c であるから通常の和の公式は使えない).

ドップラー効果

X' 軸と θ' の角度の方向に伝播するB座標系の平面波を考えよう. この波は

$$C\exp\{2\pi i\nu'(t'-x'\cos\theta'-y'\sin\theta')\} \tag{92.23}$$

と表される. (92.9) 式を用いるとAの座標系から見る平面波は

$$C\exp\{2\pi i\nu(t-x\cos\theta-y\sin\theta)\} \tag{92.24}$$

と表される. ただし,

$$\nu = \frac{\nu'}{\sqrt{1-v^2}}(1+v\cos\theta') \tag{92.25}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{1+v\cos\theta'}\sqrt{1-v^2}, \quad \cos\theta = \frac{v+\cos\theta'}{1+v\cos\theta'} \tag{92.26}$$

と置いた. したがって,

$$\cos\theta' = \frac{-v+\cos\theta}{1-v\cos\theta} \tag{92.27}$$

これを (92.25) 式に代入すれば

$$\nu = \nu'\frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v\cos\theta} \tag{92.28}$$

が得られる. この結果は, v も2次以上の項を無視するなら通常の公式

$$\nu = \nu'(1+v\cos\theta) \tag{92.29}$$

と同じである. しかし, 相対論的公式 (92.28) は, 垂直方向 ($\cos\theta=0$) を通過する光源からの光にも赤色偏光することを示している. これが実験で確かめられている横方向のドップラー効果であり,その値も実測値によくあっている[1].

時計のパラドックス

相対性理論のパラドックスの一つに,「時間のパラドックス」がある. これは, 1918年頃盛んに論議されたテーマであり, Einstein[2]によってその意味が解明された. 変換公式 (92.9) によると, B座標系の観測者がA座標系の時計の指す時刻と自分の時計の指す時刻を比較すると, A座標の方の時計の方が進んでいることを発見するであろう (このことが時計の刻の変化によるものでないこ

1) H.Ives and G. Stilwell, J. Opt. Soc. Amer. 28,215 (1938) and 31,369 (1941)

2) A. Einstein, Die Naturwissenschaften 6, 697 (1918)

とは，もしA座標の方でB座標の時計の指す時刻について同様の観測を行えば同じ結果を得ることから分かる)．もし，相対速度vが光速に近いならば，Bの時計の1秒の時間間隔はAの時計の1年にも匹敵するであろう．このことは，別の形で表現することができる．宇宙飛行士が光速に近いスピードでシリュウスに向かい，再び光速に近いスピードで地球に帰ってきたとする．飛行士は彼の時計で16秒で出発点に戻ったとしても，地球上のわれわれにとっては16年の歳月が過ぎている．われわれの常識（これは絶対時間という誤ったことを仮定している）からは，このことは確かにパラドックスに思われるが，このことは決して矛盾したことではない．シリュウスまで旅をしてきた飛行士は，われわれと全く異なる時空間を通過してきたのであって，われわれと同じように年を取らなければならない理由はどこにもない．

しかし，次のように実験結果を解釈したならば明らかに「パラドックス」である：観測者A「私は，Bが速度vで右の方に飛んで行き再び元の速さで元のところに帰ってきたのを見た」．観測者Bが観測することも全くこれと同じでありただ「右へ」を「左へ」に変えるだけである．この場合になぜ観測者AとBの間で年の取り方が違ってくるのであろうか．上の表現は，事象の運動学的記述であるに過ぎず，状況の本質的な要素が無視されている．したがって，物理的に見ると不完全な記述でしかない．もし，AもBも加速度計を持っていたならば，Aの加速度はゼロであり，Bはシリュウスのところで引き返すとき非常に大きな加速度を検知したはずである．このように，AとBの物理的状況ははなはだ異なっているので対称性の要請は破綻していないのである．

時計のパラドックスを確かめる実験においては，寿命の短い素粒子を用いればよい．例えば上空の宇宙線シャワーで生まれたμ中間子を用いる．素粒子の寿命は，実験室での実験によって求められている．その結果によると，もし相対論的な時間の遅れを考慮しないなら，光速の99.5%にも達する速度でも600 mはとても透過することはない．相対論的効果を考慮すると6000 m以上も透過するし，十分海面まで達することができる．この実験結果は，相対性理論の公式を用いて説明される．「時計のパラドックス」の効果は実験によって完全に証明された[1]．

1) W. Swann, Rep. Prog. Phys. 10, 1 (1946)（特に p. 16）.

§ 3. ミンコフスキーの4次元世界

変換の公式 (92.9-10) は

$$C(x^2+y^2+z^2) = C(x'^2+y'^2+z'^2) \tag{93.1}$$

を不変に保つ．この関係で結ばれる座標系は，自然現象を記述する上で同等に有効であるより一般的な座標系の特別の場合である．そのような座標系には，原点の並進（3個のパラメータ），時間の原点の並進（1個のパラメータ），空間座標軸の回転（3個のパラメータ）そして速度 $\boldsymbol{v}$ の並進運動（3個のパラメータ）の自由度（全部で10個のパラメータが選べる）がある．これらの座標系は，一つの表式で特徴付けられる，すなわち，代数量

$$C[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2-(t-\bar{t})^2] \tag{93.2}$$

（規格化してない時間を用いるときには，最後の項には c^2 を掛けなければならない）．この他に，座標間の関係は線型であると要請する．ニュートン力学では座標間の同等性は

$$s^2 = (x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2 \tag{93.3}$$

が不変である場合に限られている．これは，2点 (x, y, z) と $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ の間の距離である．この同等性は，空間が3次元ユークリッド空間であると考えたことによる．この空間では，どの点も同等（並進の対称性）であり，どの方向も同等（回転対称性）である．

座標系の同等性を2次形式

$$s^2 = C[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2-c^2(t-\bar{t})^2] \tag{93.4}$$

の不変性で定義することは，物理的空間は計量空間であり，その距離が (93.3) 式ではなくて (93.4) 式で定義されることを意味している．空間座標 x, y, z に時間が加わって<u>4次元空間</u>になる．しかし，この空間の距離の定義式は，最後の項にマイナスの記号が付いているのでユークリッド空間ではない．<u>形式的</u>にこの空間をユークリッド空間と見なしたいならば，次のような座標を導入すればよい：

$$x_1 = ix,\ x_2 = iy,\ x_3 = iz,\ x_4 = \mathrm{ct} \tag{93.5}$$

この記号を用いると距離は

$$s^2 = -C[(x_1-\bar{x}_1)^2+(x_2-\bar{x}_2)^2+(x_3-\bar{x}_3)^2+(x_4-\bar{x}_4)^2] \tag{93.6}$$

で定義される．ニュートンの「絶対空間」，「絶対時間」という概念はここでは

もはや成り立たず，一つの高い次元の概念に統一されている．すなわち，相対性理論のいう「絶対時空間」である．この見方を取ると，前節の相対論的効果は皆幾何学的効果と見なされ，自然現象は擬ユークリッド計量の4次元空間で生起していると解釈される．

(93.6) 式で定数Cは距離を定義するときの単位の選び方に関係する量であり無視してもよい．しかし，Cを-1と選ぶか$+1$と選ぶかは重大問題である．物理的に関係を持つ点の間の距離が実数であるようにするためには $C=+1$ でなければならない．このときには，

$$s^2 = c^2(t-\bar{t})^2-(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2-(z-\bar{z})^2 \tag{93.7}$$

あるいは，微分形式

$$ds^2 = c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \tag{93.8}$$

と置く．2次形式の係数の符号（＋，－，－，－）は4次元ユークリッド空間での値（＋，＋，＋，＋）と全く異なっている．ユークリッド幾何学では，距離がゼロであることが2点が完全に一致することを意味した．ミンコフスキー空間では距離がゼロとは

$$c^2(t-\bar{t})^2-(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2-(z-\bar{z})^2 = 0 \tag{93.9}$$

のことであり，これは中心（x, y, z）から光速で時刻tに広がりはじめた球面上のすべての点の幾何学的軌跡である．この軌道に加えて，中心（$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$）に向かって収縮し$t$でその半径がゼロになる球面の点も加えておかなければならない．直交座標系の変換では，距離は不変であるからある座標系でゼロであった距離は変換されたどの座標系においてもゼロである．このことは，光の伝播速度はどの座標系でも同じであり「絶対的な現象」であることを表現している．Einstein の光速不変の原理は，線素 (93.8) の不変性という簡単な原理に同化されるのである．物体の速度が光速を越えることができないということは，距離が虚数になるという幾何学的内容と同じである．任意の時空点（$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$）は，

$$c^2(t-\bar{t})^2-(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2-(z-\bar{z})^2 \geqq 0 \tag{93.10}$$

を満たす時空点（x, y, z, t）とだけ物理的に交信可能である．方程式

$$c^2(t-\bar{t})^2-(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2-(z-\bar{z})^2 = 0 \tag{93.11}$$

から決まる点の存在範囲は点（$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$）の「光円錐」と呼ばれる．不等式

(93.10) を満たす点は，中心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ の「光円錐の内側にある」といわれる．

§ 4.　ローレンツ変換

変換 (92.9) は，ローレンツ変換の特別の場合である．ローレンツ変換は，4 次元ユークリッド空間（座標は，$x_1=ix$, $x_2=iy$, $x_3=iz$, $x_4=ct$）の 4 次元の回転によって特徴付けられる．しかし，ローレンツ変換を実数 (x, y, z, t) の 1 次変換で 2 次形式

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2 \tag{94.1}$$

を不変にする変換と定義しておけば複素数を用いなくてもよい．

Hamilton が四元数を発見した当時はまだ 4 次元世界は知られていなかったのであったが，四元数はローレンツ変換の一般的性質を調べる上で大変に有力な道具である．四元数は，次のように定義される：

$$Q = q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}+q_4 \tag{94.2}$$

ここで，第 4 成分（時間成分）は通常の数（スカラー量）であり，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は以下の関係を満たしている：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ij} &= -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{jk} &= -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{ki} &= -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{i}^2 &= \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1. \end{aligned} \tag{94.3}$$

乗演算は，可換ではない $(AB \neq BA)$ が，結合則は成り立っている．ゼロは素因数分解不能であることを含めて，乗演算の非可換性を除けば通常の代数演算の規則は全部成り立っている．四元数に「共役な」数を

$$\tilde{Q} = -q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k}+q_4 \tag{94.4}$$

で定義する．この定義によれば $Q+\tilde{Q}$ はスカラーであり，

$$|Q|^2 = Q\tilde{Q} = \tilde{Q}Q = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2 \tag{94.5}$$

となる．この量は，どの四元数とも可換である．次の共役演算の規則がある：

$$(AB)^\sim = \tilde{B}\tilde{A} \tag{94.6}$$

したがって，

$$|AB|^2 = (AB)(AB)^{\sim} = AB\widetilde{B}\widetilde{A} = (A\widetilde{A})(B\widetilde{B}) = |A|^2|B|^2 \qquad (94.7)$$

四元数は，4次元空間のベクトル（4元ベクトル）と解釈することができる．電磁場の性質（例えば，マックスウエル方程式）は，四元数を用いて書くこともできる．ローレンツ変換は，四元数を用いると簡単に扱うことができる．まず，

$$R = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} + x_4 \qquad (94.8)$$

と置き，

$$A = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} + a_4 \qquad (94.9)$$

とする．Aは条件

$$A\widetilde{A} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 \qquad (94.10)$$

を満たしているとする．このとき，方程式

$$R' = AR \qquad (94.11)$$

は，条件

$$R'\widetilde{R}' = R\widetilde{R} \qquad (94.12)$$

を満たす座標の1次変換を表している．(94.12) 式は，ベクトルRの長さが不変であることを表している．したがって，変換 (94.11) は，4次元ユークリッド空間での回転である．別の四元数Bが条件

$$B\widetilde{B} = 1 \qquad (94.13)$$

を満たしているなら，変換

$$R' = RB \qquad (94.14)$$

に関しても同じことが成り立つ．回転は群をなすから，四元数の積

$$R' = ARB \qquad (94.15)$$

もまた4次元回転を表す．単位長さの四元数 A, B で6個の自由度が表現できるのである．この数は，4次元の回転（反転は除く）の自由度の数と一致する．したがって，(94.15) 式は4次元回転の最も一般的な表現と考えることができる．

次に，四元数 A, B は，一般には係数が複素数であると仮定しよう．星印で複素共役を表すことにする．ミンコフスキー空間では，ベクトル$\boldsymbol{R}$の時間成分の係数は実数であるが空間成分の係数は虚数である．それゆえ

$$\widetilde{R} = R^* \tag{94.16}$$

である．物理的に意味のある4次元の回転（すなわち，形式 (94.1) を自分自身に変換するもの）を求めるには，条件 (94.16) が変換された座標系でも成り立つことが必要十分条件である．すなわち，

$$\widetilde{R}' = R'^* \tag{94.17}$$

も成り立っていなければならない．このことから，

$$\widetilde{B}\widetilde{R}\widetilde{A} = A^*R^*B^*$$

ないし

$$\widetilde{B}R^*\widetilde{A} = A^*R^*B^* \tag{94.18}$$

でなければならない．この条件は

$$\widetilde{B} = A^* \tag{94.19}$$

と置けば満たされる．このときは

$$\widetilde{A} = B^* \tag{94.20}$$

が成り立っている．したがって，一般的な（固有）ローレンツ変換は，四元数の積

$$R' = AR\widetilde{A}^* \tag{94.21}$$

で特徴付けられる．ここで，四元数

$$A = A' + iA''$$

の8つの成分の間には，二つの条件

$$A'\widetilde{A}' - A''\widetilde{A}'' = 1$$

$$A'\widetilde{A}'' + A''\widetilde{A}' = 0$$

がある．もし A が実数であれば $A^* = A$ であり，

$$A\widetilde{A}^* = A\widetilde{A} = 1$$

である．したがって，$R = x_4$ は $R' = x_4$ に変換される．このことは，時間軸は変換を受けないことを意味する．この場合のローレンツ変換は通常の空間の単なる回転に還元される．単位長さの実四元数を使って3次元回転を表現する方法は Euler にはじまる．3次元回転を考察するときは，回転軸（自分自身に変換される直線）に注目する．もっと一般的には，

$$R' = \lambda R \tag{94.22}$$

で特徴付けられた変換の「主軸」を求めなければならない．λ は線型変換 (94.

21）に関する行列の（必ずしも実数ではないが）主値である．この変換はすべての動径ベクトルに対して

$$|R'|^2 = |R|^2 \tag{94.23}$$

で条件付けられているから，主軸条件（94.22）は

$$(\lambda^2-1)|R|^2 = 0 \tag{94.24}$$

と書くことができる．この式の解は

$$\lambda = \pm 1 \tag{94.25}$$

ないしは

$$|R|^2 = 0 \tag{94.26}$$

である．

条件（94.26）は主軸が

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = 0 \tag{94.27}$$

を満たす零円錐（null cone）上にあることを示す．したがって，ローレンツ変換の主軸は λ がたとえ ± 1 に等しくない場合も物理的に許される．ユークリッド空間ではこのことは不可能である．実際，偶数次元のユークリッド空間は，自分自身に変換される直線（奇数次元ならば，少なくとも一つの回転軸が見つかる）を持つことはない．主値が1ではないローレンツ変換は，先の零円錐（94.27）上に2本の主軸をいつも持ち（極限ではこの2本が1本に重なる）[1]，他の2本も同様に零円錐上にあるが複素数の座標を持つ．

二つの実主軸を使って，ローレンツ変換を作り出してみよう．これらの主軸は，（94.27）を満たしているので簡単に「零軸（null axis)」と呼ぶ．零軸を四元数であるとして P, Q で表すことにする．（94.27）式を満たす軸であるから，これらの軸の長さはゼロでなければならない：

$$P\tilde{P} = Q\tilde{Q} = 0 \tag{94.28}$$

一方，これらが実軸であるためには，条件（94.16）も満たしていなければならない．それゆえ，

$$\begin{aligned} P &= p_4[1+i(p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k})] = p_4(1+i\boldsymbol{P}), \\ Q &= q_4[1+i(q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k})] = q_4(1+i\boldsymbol{Q}), \end{aligned} \tag{94.29}$$

1） 詳しくは，J. L. Synge, Relativity, the special theory (North-holland, Amsterdam, 1956), pp. 89ff を参照．

と置く．ここで，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ は通常の 3 次元ベクトルであるけれども，これらはスカラー部分がゼロである四元数であると考えてもよい．

条件 (94.28) から，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{P}} &= p_1^2+p_2^2+p_3^2 = 1 \\ \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{Q}} &= q_1^2+q_2^2+q_3^2 = 1 \end{aligned} \tag{94.30}$$

が得られる．二つのベクトル $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ の大きさを

$$p_4 = q_4 = p \tag{94.31}$$

と

$$\begin{aligned} P\tilde{Q}+Q\tilde{P} &= p_4(1+i\boldsymbol{P})q_4(1-i\boldsymbol{Q})+q_4(1+i\boldsymbol{Q})p_4\ (1-i\boldsymbol{P}) \\ &= 2p^2(1-\cos\theta) = 1, \end{aligned} \tag{94.32}$$

によって，規格化しておく．ただし，θ は $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ のなす角である（最初から $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ が一致している場合を除く）．

変換 (94.21) に該当する四元数 A を次のように置く：

$$\begin{aligned} A &= \alpha P\tilde{Q}+\frac{1}{\alpha}Q\tilde{P} \\ \tilde{A}^* &= \alpha^*\tilde{Q}P+\frac{1}{\alpha^*}\tilde{P}Q \end{aligned} \tag{94.33}$$

（第 2 の方程式では，(94.16) を用いた）．まず，α の値いかんにかかわらず，条件 (94.10) は満たされていることを示そう．

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= \left(\alpha P\tilde{Q}+\frac{1}{\alpha}Q\tilde{P}\right)\left(\alpha Q\tilde{P}+\frac{1}{\alpha}P\tilde{Q}\right) \\ &= (P\tilde{Q})^2+(Q\tilde{P})^2 \\ &= (P\tilde{Q}+Q\tilde{P})P\tilde{Q}+(Q\tilde{P}+P\tilde{Q})Q\tilde{P} \\ &= (P\tilde{Q}+Q\tilde{P})^2 = 1. \end{aligned} \tag{94.34}$$

ベクトル $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$（(94.30-32) の規格化条件のため）は四つの自由度を表している．これに加えて，複素数 α が二つの自由度を持つ．次に，P，Q が変換の主軸であることを示す．

$$\begin{aligned} P' &= \left(\alpha P\tilde{Q}+\frac{1}{\alpha}Q\tilde{P}\right)P\left(\alpha^*\tilde{Q}P+\frac{1}{\alpha^*}\tilde{P}Q\right) \\ &= \alpha\alpha^*P\tilde{Q}P\tilde{Q}P = \alpha\alpha^*(P\tilde{Q}+Q\tilde{P})P(\tilde{Q}P+\tilde{P}Q) \end{aligned}$$

$$= \alpha\alpha^* P. \tag{94.35}$$

したがって,

$$P' = \alpha\alpha^* P, \quad \lambda_1 = \alpha\alpha^* \tag{94.36}$$

である．同様にして,

$$Q' = (1/\alpha\alpha^*)Q, \quad \lambda_2 = 1/\alpha\alpha^* \tag{94.37}$$

が得られる．二つの四元数 PQ, QP の主軸も同じ方法で求められる：

$$\left(\alpha P\tilde{Q} + \frac{1}{\alpha} Q\tilde{P} \right) PQ \left(\alpha^* \tilde{Q} P + \frac{1}{\alpha^*} \tilde{P} Q \right)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^*} P\tilde{Q}PQ\tilde{P}Q$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^*}(P\tilde{Q}+Q\tilde{P})PQ(\tilde{P}Q+\tilde{Q}P) = \frac{\alpha}{\alpha^*}PQ. \tag{94.38}$$

したがって

$$(PQ)' = \frac{\alpha}{\alpha^*}(PQ) \qquad \lambda_3 = \frac{\alpha}{\alpha^*} \tag{94.39}$$

$$(QP)' = \frac{\alpha^*}{\alpha}(QP) \qquad \lambda_4 = \frac{\alpha^*}{\alpha} \tag{94.40}$$

が得られる．

以上のようにして，任意のローレンツ変換の4本の主軸が求められた．第1の組 (94.36-37) は実数の固有値（二つは逆数の関係）を持つ．この二つは，実零円錐（real null cone）上にある．第2の組 (94.39-40) の方は，虚零円錐（complex null cone）上にあり，固有値は複素共役である．この場合も固有値は逆数の関係にある．

特殊な場合

ローレンツ変換は，一般には異なる4個の主値を持つ．したがって，ローレンツ変換は，4本以上の主軸を持つことはない．しかし，特別のローレンツ変換に関しては，平面全体が不変に保たれることがあることを示した．このことが起きるのは二つの固有値が一致した場合だけである．上に示した分類に従うと，次の二つの場合が考えられる：

（a） α が実数であるときは

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 1 \tag{94.41}$$

（b）　αが複素数であり，絶対値が１であるときは

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \tag{94.42}$$

二つの条件が同時に満たされるのは$\alpha = 1$の場合であり，このときは$R' = R$であり，すべての点が不変である．この特別の場合を除けば，変換によって一つの面以外に不変に保たれるものはない．

1．（a）の場合から考えてみよう．この場合αは一つの条件を満たしておればよいから，５個のパラメータを持つ変換である．４個の固有値はすべて実数であり，全部実主軸であることが特徴である．PQもQPもともに複素量であるから，このことは（94.39-40）式からはすぐには分からない．しかし，λ_3とλ_4が一致していることから，この二つの軸の任意の線型結合を作ってみると（94.16）から次の４元ベクトルは実ベクトルでなければならないことが分かる：

$$C_1 = PQ + QP, \quad C_2 = i(PQ - QP) \tag{94.43}$$

これらの間のスカラー積は

$$(PQ \pm QP)(\tilde{Q}\tilde{P} \pm \tilde{P}\tilde{Q}) = \pm(PQ\tilde{P}\tilde{Q} + QP\tilde{Q}\tilde{P})$$

である．$|C_1|^2 = |C_2|^2$であり，P, Qを（94.29）式のように表すと，

$$|C_1|^2 = |C_2|^2 = -2p^2 \sin^2\theta = -(1+\cos\theta) \tag{94.44}$$

が得られる．したがって，どの主軸も零円錐の外にあり，ローレンツ変換によって変換される物理的空間の外部ということになる．同じことは二つの４元ベクトルの張る不変面についてもいえる．特殊変換（92.9-10）のYZ面も零円錐の外にあるので，いま論じた種類の変換に属する．この場合は

$$\cos\theta = -1, \quad p = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{1-v}{1+v}},$$

$$P = \frac{1}{2}(1+ii), \quad Q = \frac{1}{2}(1-ii),$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-v}+\sqrt{1+v}}{\sqrt[4]{1-v^2}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-v}-\sqrt{1+v}}{\sqrt[4]{1-v^2}}ii$$

となっている．

2．次に（b）の場合について考えてみよう．α は $exp(i\gamma)$ と書けるはずであるから，この場合の変換は5個のパラメータをもつローレンツ変換である．不変面は，主軸 P, Q の線型結合によって特徴付けられる：

$$C = aP+bQ \tag{94.45}$$

それゆえ，

$$|C|^2 = (aP+bQ)(a\tilde{P}+b\tilde{Q}) = ab(P\tilde{Q}+Q\tilde{P}) = ab \tag{94.46}$$

が得られる．a と b が同符号のときの不変面の点は零円錐の内部（実空間）にあるが，異符号の場合には零円錐の外部（虚空間）にある．

こうして，（a），（b）二つの場合はともに除外される．

3．これら2種類の変換には共通点が一つある．それは4個のパラメータを持つ変換であり，P と Q を近づけると同時に α を1に近付けることで得られるということである．ε を無限小のパラメータとして，

$$\alpha = 1+\varepsilon \tag{94.47}$$

と置くと，四元数（94.33）は

$$A = 1+\varepsilon(P\tilde{Q}-Q\tilde{P}) \tag{94.48}$$

となる．さらに，

$$P = p(1+i\boldsymbol{P}_0+i\mu\boldsymbol{P}_1),\quad Q = p(1+i\boldsymbol{P}_0-i\mu\boldsymbol{P}_1),\qquad |\boldsymbol{P}_0| = |\boldsymbol{P}_1| = 1,\quad \boldsymbol{P}_1\perp\boldsymbol{P}_0 \tag{94.49}$$

と置くと，μ の2次以上の項を無視するとき

$$P\tilde{Q}-Q\tilde{P} = 4p^2i\mu(\boldsymbol{P}_1+i\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1), \tag{94.50}$$

$$\cos\theta = 1-\mu^2. \tag{94.51}$$

が得られる．条件（94.32）を考慮し

$$2p^2 = 1/\mu^2 \tag{94.52}$$

と置くと，

$$\varepsilon(P\tilde{Q}-Q\tilde{P}) = \frac{2\varepsilon}{\mu}i(\boldsymbol{P}_1+i\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1). \tag{94.53}$$

が得られる．二つのパラメータの比 $2\varepsilon/\mu$ は任意の有限値 β に近づく．したがって，この結果は次のように表現できる．四元数A（これは（94.21）によりローレンツ変換を生み出す）は

$$A = 1+i\beta(\boldsymbol{P}_1+i\boldsymbol{P}_2) \tag{94.54}$$

と書ける．ただし，$\boldsymbol{P}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ は

$$|\boldsymbol{P}_1|^2 = |\boldsymbol{P}_2|^2 = 1, \quad \boldsymbol{P}_1 \perp \boldsymbol{P}_2$$

を満たす．変換の主軸は $\boldsymbol{P}_2$ と $1+i\boldsymbol{P}_0$ である．ただし，

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2 \tag{94.55}$$

とする．固有値 $\lambda=1$ は4重に縮退しているが，主軸PとQは重なっているので2本の主軸しか求められない．そのうえ (94.43) の第1軸 C_1 はPに一致している（なぜなら，$P^2=2pP$である）．したがって，零軸 C_1 は3重に縮退していることになる．一方，C_2 は3元ベクトル$\boldsymbol{P}_2$ に近付く．

ベクトル $\boldsymbol{P}_2$ と $1+i\boldsymbol{P}_0$ によって決まる面は，零円錐の外部にあるがこれに直線 $a(1+iP_0)$ で接する．

例として，変換

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{k},\ \mathrm{A} = 1+i\beta(\boldsymbol{j}+i\boldsymbol{k})$$

を考える．このとき，

$$R' = (1+\beta i\boldsymbol{j}-\beta\boldsymbol{k})R(1+\beta i\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k})$$

であり，これを成分を用いて具体的に書き下すと，

$$x_1' = (1-2\beta^2)x_1+2\beta x_2+2i\beta^2 x_4,$$

$$x_2' = -2\beta x_1+x_2+2i\beta x_4$$

$$x_3' = x_3,$$

$$x_4' = 2\beta^2 i x_1-2\beta i x_2+(1+2\beta^2)x_4.$$

となる．$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{k}$ が主軸であることはすぐ分かる．また，$x_1=i$, $x_2=x_3=0$, $x_4=i$ が第2の主軸であることも示せる．

無限小ローレンツ変換

$\alpha=1$ と置けば恒等変換が得られる．αの値を1の近くに選べば，座標軸の無限小回転にあたる「無限小変換」が得られる．任意の有限回転は，無限小回転の積み重ねとして求めることができる．

もう一度 (94.48) 式について考える．$P\tilde{Q}-Q\tilde{P}$ は空間成分だけの四元数（スカラー成分がゼロ）であったから，

$$A = 1+(1/2)i\varepsilon(\boldsymbol{b}+i\boldsymbol{a}) \tag{94.56}$$

と書くことができる．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は任意の3元ベクトルであり，ε は無限小のパラメータである．このとき，

$$R' = AR\tilde{A}^* = [1+\frac{1}{2}\varepsilon i(\boldsymbol{b}+i\boldsymbol{a})]R[1+\frac{1}{2}\varepsilon i(\boldsymbol{b}-i\boldsymbol{a})]$$

$$= R-\frac{1}{2}\varepsilon(\boldsymbol{a}R-R\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\varepsilon i(\boldsymbol{b}R+R\boldsymbol{b})]. \tag{94.57}$$

が得られる．これを成分に分けて書くと，

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+\varepsilon a_3x_2-\varepsilon a_2x_3+i\varepsilon b_1x_4, \\ x_2' &=-\varepsilon a_3x_1+x_2+\varepsilon a_1x_3+i\varepsilon b_2x_4, \\ x_3' &= \varepsilon a_2x_1-\varepsilon a_2x_2+x_3+i\varepsilon b_3x_4, \\ x_4' &=-i\varepsilon b_1x_1-i\varepsilon b_2x_2-i\varepsilon b_3x_3+x_4. \end{aligned} \tag{94.58}$$

となっている．

§ 5. 1粒子の力学

力学の変分原理によれば，ラグランジュの関数さえあたえたなら，どんな力学系の運動方程式も求めることができる．ニュートン力学では時間と空間とは別の働きをしており，時間 t が独立変数として導入されているが相対性理論力学では，このような扱い方をしていない．時間は空間座標と同じ根拠を持つ座標の一つでしかない．物理現象は，計量構造を持つ4次元空間で生起する．計量構造の示すところによると時空間には特別の方向性といったものが見られない．特別の方向性をもつ方程式は，相対性原理に背き，受け入れることはできないから，物理的世界の計量構造を反映するように修正されなければならない．

ラグランジュの関数が存在するなら，このことは簡単に進められる．ラグランジュの関数は4次元空間のスカラー量（すなわち，任意のローレンツ変換の不変量）であれば，それから導出される運動方程式はローレンツ不変であり，相対論的に見て正しい．

すでに，ニュートン力学の問題はラグランジュの関数 $L=T-V$（(51.7) 参照）を利用したときどのようにして解かれるかを解説した．ここで T は運動エネルギーであり，V はポテンシャル・エネルギーである．質量 m の粒子を考えてみよう．運動エネルギーは

$$T = (1/2)mv^2 \tag{95.1}$$

であたえられる．これがニュートンの世界では粒子の慣性に関係するスカラー量である．しかし，相対性理論の世界ではこれはスカラー量ではない．Einstein の時空間では世界線で粒子の運動が描写され，その線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2 \\ &= dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2 \end{aligned} \tag{95.2}$$

であたえられる．すなわち，この描像では，世界線の接線が粒子の速度を表していた．接線ベクトルの成分は

$$\frac{dx_1}{ds},\quad \frac{dx_2}{ds},\quad \frac{dx_3}{ds},\quad \frac{dx_4}{ds} \tag{95.3}$$

である．しかし，この考え方とニュートン力学の考え方との関係は光速が粒子の速度に較べて非常に大きいということを考慮すれば明らかになってくる．線素 (95.2) は，

$$ds = \sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,dt \tag{95.4}$$

と書くこともできるので，ds を cdt で置き換えてもそのことによる誤差は非常に小さいことが分かる．特に，

$$ds = c\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)dt \tag{95.5}$$

と近似してもよい．したがって，この近似の範囲で

$$\int_{t_1}^{t_2} mcds = \int_{t_1}^{t_2} mc^2dt-\int_{t_1}^{t_2} Tdt \tag{95.6}$$

と置ける．(95.6) 式の右辺の第1項が，c^2 に比例するにもかかわらず通常の状況では無視されているのは，質量mの極度の安定性の結果として説明される．mが定数ならば，第1項の変分はゼロであり，この項を除外して進められる．したがって，相対性理論的不変性を保証するためには作用積分

$$\int_{t_1}^{t_2} Tdt \tag{95.7}$$

を積分し，

$$-c\int_{t_1}^{t_2} m ds \tag{95.8}$$

で置き換えなければならない．

作用積分の慣性項をこのように変形すると，いくつかの重要な事柄を引き出すことができる．まず，時間 t を独立変数としてみよう．このとき，作用積分 (95.8) のラグランジュの関数は座標 x, y, z で q_i と置き

$$L = -c^2 m\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)} \tag{95.9}$$

と書いてもよい．変分原理の一般論からすると，力学系の運動量はLを q_i で偏微分して求められる．すなわち，

$$p_i = \frac{m\dot{q}_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{95.10}$$

ないしは，ベクトル記号で表すと，

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{95.11}$$

である．したがって，ニュートンの運動量との相違は，速度が小さい限り僅かである．速度が光速に近くになるにつれて，この違いは大きくなる．もう一つの量はエネルギーである．エネルギーは，

$$E = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{q}_i - L \tag{95.12}$$

と定義される．したがって，いまの場合には

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{95.13}$$

である．この結果こそは，物理学における最も重要な発見の一つである．ニュートン力学では，粒子の運動エネルギーは $mv^2/2$ であたえられ，質点が運動しているときだけ，運動エネルギーを持つことができた．(95.13) 式は，ニュートン項の他に質点が存在するだけですでに運動エネルギーを遥かに凌ぐ大きなエネルギーを内包していることを示している．エネルギーは種々の形態に変換することがたやすくできることを考慮すると，この結果，質量に関係した潜在的なエネルギーも別の形態に変換される可能性のあることが分かった．原子爆弾の製造は，この意味で相対性理論の正しさの一つの不幸な形での証明

である．光の速さ c の実験値（3×10^{10} cm/sec）を用いると，1 g の質量がエネルギー変換されたとするとその値は 9×10^{20} erg$=9\times10^{13}$ J$=2500$ 万キロワット時にもなる．もう一つの基本的な結論は，被積分関数から得られる：

$$p_1dx+p_2dy+p_3dy-Hdt$$
$$=\frac{p_1}{i}dx_1+\frac{p_2}{i}dx_2+\frac{p_3}{i}dx_3-\frac{H}{c}dx_4=\sum_{i=1}^{4}\bar{p}_idx_i \tag{95.14}$$

4 元運動量の四つの成分 $\bar{p}_i$ が，4 元ベクトルの成分であるためには変換の不変性を備えていなければならない．実際に，(95.11) と (95.13) 式から

$$\bar{p}_1=-mc\frac{dx_1}{ds},\quad \bar{p}_2=-mc\frac{dx_2}{ds}$$
$$\bar{p}_3=-mc\frac{dx_3}{ds},\quad \bar{p}_4=-mc\frac{dx_4}{ds} \tag{95.15}$$

が結論され，世界線の4 元接線ベクトルに $-mc$ を乗じた量 $\bar{p}_i$ に等しい．

ニュートン力学では異なる概念と思われていた運動量とエネルギーは，相対性理論では分離されない一体のものとして捉えられる．すなわち，運動量とエネルギーは，ミンコフスキーの時空間の 4 元ベクトルの成分なのである．初期の頃の相対性理論の文献では，(95.11) 式を

$$\boldsymbol{p}=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{v} \tag{95.16}$$

と書いて，

$$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{95.17}$$

を相対論的質量と呼んでいるものがある．この質量は速度とともに変化し速度が光速に近づくと無限に大きくなる．ついに v が c に等しくなると質点の慣性が無限大になってしまい，有限の力では決して光速を越えられないという相対論的効果を説明するだけならば (95.17) 式は便利かも知れない．しかし，補正因子は dt に関係していることに注意しよう．運動量の定義は相対論的に不変な意味を持ち得る弧の長さ s で微分するのであって時間 t（こちらは，不変な意味をもち得ない）による微分ではない．弧の長さ s の代わりに，もっと物理的な「固有時」を用いることができる．これは，粒子とともに運動している座標系に現れる時間であり，粒子の世界線に固有のものである．固有時を σ と書

くことにすると，粒子はこの座標系ではいつまでも静止していることになるので，

$$ds = cd\sigma \tag{95.18}$$

である．この結果を用いると

$$\frac{cdx}{ds} = \frac{dx}{d\sigma} = \frac{dx}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt} \tag{95.19}$$

であることが分かる．ニュートン力学と同じように速度を単位時間内の位置の変化の割合と定義したならば，今度は固有時を単位にとることにすると運動量の定義式（95.11）は

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{95.20}$$

と書ける．

§6.　粒子の運動のハミルトン形式

前節では，時間 t を独立変数として扱ったのでどの座標も皆同等であるとする相対性理論の精神には合致していない．座標をどれも同等に扱うためには，パラメータ τ を導入し四つの座標 $q_i=x_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ は τ の関数であるとすればよい．この方式でなら運動方程式がハミルトンの形式で扱える（第6章§10）．

ハミルトン形式での基本的関数は，ハミルトンの関数

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L \tag{96.1}$$

である．粒子の運動を記述するラグランジュの関数は

$$L = -mc\frac{ds}{d\tau} = -mc\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i{}^2} \tag{96.2}$$

であたえられているから，運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -mc\frac{\dot{q}_i}{\sqrt{\sum\dot{q}_i{}^2}} = -mc\frac{dq_i}{ds} \tag{96.3}$$

となる．したがって

$$H = \sum_{i=1}^{4} p_i \dot{q}_i - L = -mc\sum_{i=1}^{4}\frac{dq_i^2}{dsd\tau} + mc\frac{ds}{d\tau} = 0 \tag{96.4}$$

である．ここで再び (610.5) 式と同じ困難に出会う．正準形式のラグランジュの関数は

$$L = \sum_{i=1}^{4} p_i \dot{q}_i - H \tag{96.5}$$

であり，いま問題にしている系では $H=0$ であるけれども，ハミルトンの関数の役割は運動量 p_i の間の恒等式として受け継がれているのでなんら問題はない．実際に (96.3) 式において恒等式

$$\Sigma p_i^2 - m^2 c^2 = 0 \tag{96.6}$$

が成り立っていなければならないので，q_i を p_i の関数として求めることができないことを示している．(96.6) 式は，変分問題の付加条件である．すなわち，付加条件 (96.6) の下で作用積分

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{4} p_i \dot{q}_i d\tau \tag{96.7}$$

を最小にすればよい．このことは，ラグランジュの関数が

$$L' = \sum_{i=1}^{4} p_i \dot{q}_i - \lambda\left(\sum_{i=1}^{4} p_i^2 - m^2 c^2\right) \tag{96.8}$$

となることに他ならない．ラグランジュの未定係数は，パラメータ τ の自由度に関係している．パラメータの単位は任意に選ぶことができるので，$\lambda=1$ と置くことにする．ここで非相対論的力学の場合との決定的な相違は，総和が 4 個の座標全部に及んでいる点である．

§ 7. ポテンシャル・エネルギー V

ニュートン力学のラグランジュの関数に戻る．運動エネルギー T を相対性理論の原理に合致するように修正するにはどうすればよいかはすでに示した．今度は，ポテンシャル・エネルギー V の積分

$$A = -\int_{t_1}^{t_2} V dt \tag{97.1}$$

について考察する．仮にVが4次元空間のスカラー量

$$V=V(x_1,\ \cdots,\ x_4) \tag{97.2}$$

であるとしたいなら，積分の方を4次元的な内容に修正しなければならない．そのためには，dt を $d\sigma$ で置き換えればよい．こうして次の形式の積分を得る：

$$-\int_{t_1}^{t_2} V\frac{ds}{c} \tag{97.3}$$

作用積分全体は

$$\begin{aligned} A&=-\int_{t_1}^{t_2}\left(mc+\frac{V}{c}\right)ds \\ &=-c\int_{t_1}^{t_2}\left(m+\frac{V}{c^2}\right)ds \end{aligned} \tag{97.4}$$

と書かれることになる．

この式からわれわれはスカラー・ポテンシャルの存在とは粒子の質量が実際に V/c^2 だけ増加したことと同等であること知る．時計のネジを巻けば，なにがしかの弾性エネルギーとしてポテンシャル・エネルギーが蓄えられる．その結果，時計の質量を変化させたことになる．化学物質がポテンシャル・エネルギーを失ってより安定な配位状態に遷移（すなわち，化学結合のエネルギーを熱として失う）したとすると，新しくできた化学物質の質量は元の質量より少なくなっている．しかし，この差は c^2 で割った量であり，きわめて微量であり観測することはできないであろう．

膨大な数の原子が含まれている核反応の過程では事情が全く異なり，質量の変化が劇的な現象として観測される．水素原子核（陽子）の質量は 1.008146（原子単位）であり，中性子の質量は1.00897（原子単位）である．ヘリューム原子核の質量は 4.003879（原子単位）である．超高温においては，水素原子は中性子（と炭素）が存在すればヘリュームに変化する（核融合）．なぜなら，ヘリューム原子核は2個の陽子と2個の中性子から造られているからである．しかし，核融合で生まれたヘリューム原子の質量は0.03136（原子単位）だけ小さい．この値は，全質量の1％にも達する．この質量差に該当するエネルギーは

熱として一瞬に放出される．これが，水爆の破壊力なのである．

§ 8.　ニュートンの重力理論の相対論的定式

最小作用の原理に関係したラグランジュの方程式を求めてみよう．独立変数 τ を用いることにし，四つの座標はどれも同等に扱い q_i は τ の関数と見なす．この方法では，ラグランジュの関数は

$$-L = \left(m+\frac{V}{c^2}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i{}^2} \tag{98.1}$$

であたえられ，ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{V}{c^2}\right)\frac{dq_i}{ds}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial q_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i{}^2} \tag{98.2}$$

となる．この結果は次のようにも書ける：

$$c\frac{d}{ds}\left[\left(m+\frac{V}{c^2}\right)c\frac{dq_i}{ds}\right] = \frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{98.3}$$

すなわち，

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\left(m+\frac{V}{c^2}\frac{dq_i}{d\sigma}\right]\right. = \frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{98.4}$$

ニュートン力学の微分演算子 d/dt が相対論的不変な微分演算子 $d/d\sigma$ に置き換えられている以外は，質量 m が $m+V/c^2$ と極く僅かだけ補正されただけである．ニュートン力学においては，(98.4) 式の右辺はマイナスの符号を持っていた．しかし，このことも座標 q_1, q_2, q_3 はデカルト座標 x, y, z ではなく，ix, iy, iz であることで説明される．デカルト座標を用いて書くには，右辺に（−1）を掛ければよい．

このことに加えて，$i=4$ に当たる新しい方程式を得る．この方程式がエネルギー保存の法則である．ポテンシャル・エネルギー V が時間 t を含まない（すなわち，x_4 を含まず，静的な外場）と仮定する．このときの第4の方程式は

$$\frac{mc^2+V}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{一定} \tag{98.5}$$

であり，v/c の2次のオーダーまでとるとき

$$mv^2/2+V = \text{一定} \tag{98.6}$$

となり，これはニュートン力学でのエネルギー保存の法則に他ならない．同じ問題は，ハミルトンの形式でも扱うことができる．このためには，ヤコビの原理に関連して導出された結果を利用する．$\sqrt{2(E-V)}$ を $m+V/c^2$ で置き換えさえすれば，ヤコビの原理は最小作用の原理と形式において同じである．したがって，ラグランジュの関数は

$$L = \sum_{i=1} p_i \dot{q}_i - H \tag{98.7}$$

が得られる．ただし，微分は τ に関して行うものとする．一方，ハミルトンの関数は

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_i^2}{(m+V/c^2)^2} \tag{98.8}$$

であたえられる．ここで，エネルギーの単位は実現された運動では1になるように取ってある．

Newton は，天体運動の問題を「重力ポテンシャル（スカラー場）」を導入して考察した．相対論の前段階にあって，Poincare（1905年）と Minkowski（1908年）は，宇宙の4次元性と一致するようにニュートンの重力理論の修正を試みている．彼らは，ニュートンの運動方程式を (98.4) 式のように変更した．しかし，この試みはアインシュタインの一般相対性理論（1916年）によって正しくないことが分かった．一般相対性理論は，重力場の存在に関してわれわれの従来の伝統的概念を大幅に変更することを求めていた．

§9.　荷電粒子の運動

スカラー・ポテンシャル V をベクトル・ポテンシャル A_i で置き換える問題を考えてみよう．相対性理論の原理から，ベクトル A_i は（デカルト座標を用いるとき）空間成分は純虚数であるような4元ベクトルでなければならない．このベクトルは，四つの座標 $q_i=x_i$ の関数としてあたえられた場の量であるとする．このベクトルと4元速度との内積から，ミンコフスキー空間での一つのス

カラー量が定義される．したがって，われわれはポテンシャル・エネルギーを不変量

$$\frac{e}{c}\sum_{i=1}^{4}A_i\frac{dx_i}{ds} \tag{99.1}$$

で置き換えなければならない．ここで e は粒子の電荷である．次に，作用積分を

$$\mathrm{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(mc+\frac{e}{c}\sum_{i=1}^{4}A_i\frac{dq_i}{ds} \right)ds \tag{99.2}$$

と置く．ここでも，四つの座標 q_i を用いるものとし，パラメータ τ が独立変数である．ラグランジュの関数 L は次のようにあたえられる：

$$L = mc\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i{}^2}+(e/c)\sum_{i=1}^{4}A_i\dot{q}_i \tag{99.3}$$

運動量は

$$p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i = mc\, dq_i/ds+(e/c)A_i \tag{99.4}$$

であたえられる．したがって，運動方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left[mc\frac{dq_i}{ds}+\frac{e}{c}A_i \right] = \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_i}\frac{dq_\alpha}{d\tau} \tag{99.5}$$

であることが分かる．m は粒子の質量である．(99.5) 式の両辺に $d\tau/d\sigma$ を掛けて

$$m\frac{d^2q_i}{d\sigma^2}+\frac{e}{c}\frac{dA_i}{d\sigma} = \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_i}\frac{dq_\alpha}{d\sigma} \tag{99.6}$$

と書き換えることもできる．この式の左辺の第２項は

$$\frac{dA_i}{d\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial A_i}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{d\sigma} \tag{99.7}$$

であることを利用して右辺に移項して整理すると，

$$\frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4}F_{i\alpha}\frac{dq_\alpha}{d\sigma} \tag{99.8}$$

なる量が現れる．ここで，

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = F_{ik} \tag{99.9}$$

と置いた．$F_{ik}=-F_{ki}$ は反対称「テンソル」である．

ベクトルの三つの成分 A_1, A_2, A_3 も座標 $q_i=x_i$ $(i=1, 2, 3)$ も純虚数であったことに注意しよう．したがって，F_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ はすべて実数であり，F_{i4} $(i=1, 2, 3)$ は純虚数である．テンソル F_{ik}と電磁場の関係は次のとおりである：

$$\begin{aligned} &F_{14}=iE_1, \quad F_{24}=iE_2, \quad F_{34}=iE_3 \\ &F_{23}=H_1, \quad F_{31}=H_2, \quad F_{12}=H_3 \end{aligned} \tag{99.10}$$

ここで，ベクトル$\boldsymbol{E}$ は電場の強さであり，$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さである．

従来の形で方程式 (99.6) を解釈するときは，t を独立変数に戻せばよい．このことは両辺に $d\sigma/d\tau$ を掛けて行える．その結果は，

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dx_i}{dt}\right) = \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4}F_{i\alpha}\frac{dx_\alpha}{dt} \tag{99.11}$$

である．左辺はニュートンの方程式の形に書くことができる．はじめの三つの方程式に $(-i)$ を掛けて (95.11) 式で定義された運動量を用いると，左辺は運動量の時間変化の割合に等しくなる．この式の右辺は力の項である．ニュートンの運動方程式の形で表現すると

$$d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F} \tag{99.12}$$

と書け，これが「運動量の時間変化の割合は作用する力に等しい」という公式である．ここで3元ベクトル $\boldsymbol{F}$ はよく知られた記号で書くと

$$\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H})/c) \tag{99.13}$$

となり，これは荷電粒子の働くローレンツ力である．最後の方程式 $(i=4)$ が，エネルギー保存の法則である．その内容は，「運動エネルギーの時間変化の割合は作用している力のなす仕事に等しい（運動エネルギーは (95.13) 式によって相対論的に定義されている)」ということである．

一貫して相対性理論の用語を用いようとすれば，4次元的意味を持つ物理量だけを用いるべきである．そのためには，(99.11) 式に dt/ds を掛けておく方がよい．その結果は

$$mc\frac{d^2x_i}{ds^2} = \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4}F_{i\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} \tag{99.14}$$

と書かれよう．ここで速度の四つの成分は

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = 1 \tag{99.15}$$

を満たしている．この条件が運動方程式 (99.14) と矛盾しないことは，(99.14) 式に dx_i/ds を掛けて総和を求めることで確かめられる．$F_{ik}=-F_{ki}$ であるから，右辺はゼロになる．左辺は

$$\frac{1}{2}mc\frac{d}{ds}\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = 0$$

となって，(99.15) は運動の恒量であることが分かる．

(99.15) 式は，意味深長な幾何学的解釈を提供している．第7章 §8で，位相流体を無限小の正準変換の連続的繰り返しとも見ることができることを示した．そこで，速度ベクトル

$$dx_i/ds = u_i \tag{99.16}$$

に注目すると，(99.14) 式は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u_i(s+\varepsilon)-u_i(s)}{\varepsilon} = \frac{e}{mc^2}\sum_{\alpha=1}^{4}F_{i\alpha}u_\alpha \tag{99.17}$$

$$u_i(s+\varepsilon) = u_i(s)+\frac{e}{mc^2}\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{4}F_{i\alpha}(s)u_\alpha(s) \tag{99.18}$$

と書くことができる．これらの方程式を詳しく調べてみると，無限小ローレンツ変換の方程式 (94.58) と完全に一致していることが分かる．そのためには，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を電場 $\boldsymbol{E}$ でベクトル $\boldsymbol{b}$ を磁場 $\boldsymbol{H}$ で置き換えるだけでよい．したがって，電磁場中の電子の速度ベクトルの変化は無限小ローレンツ変換の連続的な繰り返しの結果と見なすことができる．電磁テンソル F_{ik} がこの変換の成分である．

興味ある極限的な場合は，電子が平面波で記述される外場の中で運動しているときである．この場合は，$E=H$ であり，$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$ である．こうして先に学んだ4パラメータのローレンツ変換の特別な場合の物理的描像が得られる（(94.47-55) を参照)．この種の変換においては，4個の固有値は全部一致しており，主軸の内の3本は零円錐 (null cone) の軸と縮退している．この3重縮退して

いる軸は，

$$1+i\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{E}|^2}$$

と書くことができる．零円錐の外部にあるもう1本の軸は磁場 $\boldsymbol{H}$ の方向を向いている．

次に同じ問題をハミルトンの形式で考察してみよう．ラグランジュの関数 (99.3) が q_i の1次同次式であるから，オイラーの定理 (610.4) によって $H=0$ となる．しかし，この場合でも運動量 p_i は恒等式を満たしており，これを付加条件として扱えば恒等式自身がハミルトンの関数の代わりをする．また，方程式 (99.4) から

$$\sum_{i=1}^{4}(p_i-(e/c)A_i)^2 = m^2c^2 \tag{99.19}$$

が得られ，(96.8) 式と同様に

$$L' = \sum_{i=1}^{4}p_i\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{4}(p_i-(e/c)A_i)^2 \tag{99.20}$$

も得られる．ここで微分の定義に使われた変数 τ のスケールは都合よく選べるので $\lambda=1$ と置いた．最後の項はハミルトンの関数

$$H = \sum_{i=1}^{4}(p_i-(e/c)A_i)^2 \tag{99.21}$$

と同等である．

この扱いにおいて，粒子の質量 m が全く現れないことは不思議に思えるに違いない．ハミルトンの正準方程式は，

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= 2\left(p_i-\frac{e}{c}A_i\right)\\ \dot{p}_i &= 2\frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4}\left(p_\alpha-\frac{e}{c}A_\alpha\right)\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_i}\end{aligned} \tag{99.22}$$

であり，(99.14) 式の左辺の mc を $1/2$ で置き換え，ds を $d\tau$ で置き換えると，(99.22) 式と (99.14) 式は同等であることが分かる．(99.14) 式の両辺に q_i を掛けて i について和をとると

$$\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i\ddot{q}_i = 0 \tag{99.23}$$

が得られる．これは

$$\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i^2 = \text{一定} \tag{99.24}$$

であることを意味している．しかし付加条件 (99.19) から

$$(1/4)\sum_{i=1}^{4}\dot{q}_i^2 = m^2c^2 \tag{99.25}$$

でなければならない．また，

$$\sum_{i=1}^{4}(dq_i/ds)^2 = 1 \tag{99.26}$$

であるから，未定であった τ は

$$\tau = s/(2mc) \tag{99.27}$$

と置いてよいことが分かり，(99.14) 式が完全に復元される．

§ 10.　4次元世界の測地線

自由粒子の運動は，作用の原理

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}\overline{ds} = 0 \tag{910.1}$$

によって解析することができる．この原理は，ポテンシャル・エネルギーVを除去した場合のヤコビの原理 (56.12) に似ている．しかし，線素 $\overline{ds}$ は3次元ではなく4次元ミンコフスキー空間の線素である．そこで点変換によって直交座標系から曲線座標系に変換したとしよう．すると，上記の線素 ds は，(15.16) 式と同じように書かれる：

$$\overline{ds} = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{4}g_{ik}dq_idq_k} \tag{910.2}$$

総和は $i=1$ から $i=4$ までとる．曲線座標系を用いると自由粒子の運動の解析は，ラグランジュの関数が

$$L = \sqrt{\sum g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k} \tag{910.3}$$

であたえられる変分問題と同じである．ここでの微分は，パラメータτによるものとする．

この問題を再度，第6章 §10で考察したハミルトンの問題に変換して考えてみる．この場合もラグランジュの関数はq_iの1次同次式であるから，ハミルトンの関数にゼロになる．しかし，運動量p_iは

$$\sum_{i,k=1}^{4} g^{ik} p_i p_k = 1 \tag{910.4}$$

を満たしている（(610.27) 式を参照）．ここでマトリックスg_{ik}の逆マトリックスをg^{ik}と書いた．したがって，この問題での有効ハミルトン関数は

$$H = \sum_{i,k=1}^{4} g^{ik} p_i p_k \tag{910.5}$$

であたえられる．g^{ik}は一般には座標q_1，…，q_4の関数である．

運動方程式は，

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= 2\sum_{\alpha=1}^{4} g^{i\alpha} p_\alpha \\ \dot{p}_i &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q_i} p_\alpha p_\beta \end{aligned} \tag{910.6}$$

であり，これがミンコフスキー空間での直線という意味をもつ．

§ 11. アインシュタインの重力理論での惑星の軌道

慣性質量が重力質量と等しく，したがって，重力の源であるという不思議であるが基本的事実に関して熟慮した末，Einstein は重力場の存在するところでは光速は一定ではあり得ないという結論に達した．ミンコフスキー型の線素からは光円錐 (93.11) が不変であることしか導けないから，Einstein の結論は重力の存在を考慮する際にはミンコフスキー型にこだわらずもっと一般的な線素を用いなくてはならないということであった．観測された物理的現象に深く根ざしたものではあるが数学的創造力を最大限に働かせて Einstein はリーマン幾何学を物理学に持ち込み，曲がった空間の幾何学を基礎にして時間と空間に留まらず物質までもが（ちょうどミンコフスキーが準ユークリッド的な4次元

空間を考えたように）一つの幾何学的実体に統一されることを示した．「物質」は 4 次元空間の曲がり具合と解釈される．

一般相対性理論を解説することは力学の範囲を越えるが，「重力の力」も特別の力ではないので惑星の運動について少し触れておく．惑星の運動は測地線に沿った運動である（すなわち，4 次元リーマン空間での自由粒子の運動と見なされること）というのが Einstein の結論である．

Einstein の理論は，ニュートンの重力理論を 4 次元のリーマン型の線素の 10 個の成分 $g_{ik}=g_{ki}$ を場の量とする体系に一般化したものである．ニュートンのスカラー・ポテンシャルの方程式は場の方程式に一般化される．重力場が球対称であるとすれば，この方程式から太陽の重力場を求めることができる．計算の結果はシュバルツシルドの線素によってあたえられる．これを極座標で表示すると

$$\overline{ds}^2 = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)dx_4{}^2-\frac{dr^2}{1-\alpha/r}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (911.1)$$

となる．ここで $\alpha=0$ と置けば，平坦なミンコフスキー型の線素 (95.2) に一致する．したがって，中心力を受けている天体の運動の解析は，線素が (911.2) であたえられるリーマン空間の測地線を求める問題と同じである．このことはハミルトンの関数が (910.5) であたえられる力学の問題を解くことを意味している．この例題のハミルトンの関数 H は

$$H = \frac{p_4{}^2}{1-\alpha/r}-\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_1{}^2-\frac{1}{r^2}\left(p_2{}^2+\frac{p_3{}^2}{\sin^2\theta}\right) \qquad (911.2)$$

であたえらている．

幾つかの研究によって示されたことであるが，球対称であるがゆえに問題は $\phi=\pi/2$ の平面の運動に還元される．したがって，われわれの問題は，ハミルトンの関数を

$$H = \frac{p_4{}^2}{1-\alpha/r}-\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_1{}^2-\frac{p_2{}^2}{r^2} \qquad (911.3)$$

として，3 組の共役変数による問題になる．この方法には，H が変数 θ も x_4 も陽に含まないという利点がある．これらは循環変数であるから，消去すると次のようになる：

$$p_2 = -A = 一定$$

$$p_4 = BA = 一定 \tag{911.4}$$

したがって，Hは

$$H = \frac{B^2A^2}{1-\alpha/r} - \left(1-\frac{\alpha}{r}\right){p_1}^2 - \frac{A^2}{r^2} \tag{911.5}$$

と書ける．

われわれが知りたいのは，運動の時間的経緯ではなく太陽の周りでの天体の軌道である．このことは，r と θ の関係を求めることである．上の例では，運動方程式は

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = -2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_1$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{2A}{r^2} \tag{911.6}$$

であるから，これより

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{A}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)p_1 \tag{911.7}$$

が求められる．これに加えて，エネルギー保存の法則

$$H = 1 \tag{911.8}$$

を考慮すれば，p_1 が r の関数としてあたえられることが分かる．このようにして天体の軌道を求める問題は，ただ一つの方程式

$$d\theta = \frac{dr}{r^2\sqrt{1-\alpha/r}}\,\frac{1}{\sqrt{-1/A^2-1/r^2+B^2/(1-\alpha/r)}} \tag{911.9}$$

に集約される（平方根の符号は，r が増加するとき θ も増加するように選んだ）．あるいは，$\rho=1/r$ と置いて

$$\theta = -\int\frac{d\rho}{\sqrt{1-\alpha\rho}\,\sqrt{-1/A^2-\rho^2+B^2/(1-\alpha\rho)}} \tag{911.10}$$

と求められる．被積分関数の分母は ρ の3次式の平方根であるので，積分は楕円積分である．太陽系では α の値はあまり大きくないので $(1-\alpha\rho)^{-1}$ を $\alpha\rho$ の級数に展開して3次以上の項を他の項にくらべて小さいとして無視すると，分母の最後の項は，

$$B^2(1+\alpha\rho+\alpha^2\rho^2) \tag{911.11}$$

と置いてよい．同様に $(1-\alpha\rho)^{-1/2}$ も $1+(1/2)\alpha\rho$ と近似してよい．その結果，

$$\theta = -\int\frac{\left(1+\frac{1}{2}\alpha\rho\right)d\rho}{\sqrt{-(A^{-2}-B^2)+\alpha B^2\rho-(1-B^2\alpha^2)\rho^2}} \tag{911.12}$$

が得られる．この積分は初等積分学の範囲では求められない．分母は因数分解できる：

$$-(1-B^2\alpha^2)(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2) \tag{911.13}$$

ここで，

$$\frac{\alpha B^2}{1-\alpha^2B^2} = \rho_1+\rho_2 \tag{911.14}$$

$$\frac{1}{A^2}-\mathrm{B}^2 = \rho_1\rho_2 \tag{911.15}$$

とした．さらに，

$$\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2) = \rho_0, \quad \frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2) = b \tag{911.16}$$

$$\rho = \rho_0+\mathrm{t} \tag{911.17}$$

と書くことにすれば，分母は

$$\sqrt{1-B^2\alpha^2}\,\sqrt{b^2-t^2} \tag{911.18}$$

となり，分子は

$$1+(1/2)\alpha\rho_0+(1/2)\alpha t \tag{911.19}$$

と書ける．したがって，被積分関数は

$$\frac{1+\frac{1}{2}\alpha\rho_0}{\sqrt{1-B^2\alpha^2}}\frac{1}{\sqrt{b^2-t^2}}+\frac{\alpha}{2}\frac{t}{\sqrt{b^2-t^2}} \tag{911.20}$$

で近似される．こうすれば積分 (911.12) は実行することができる．(911.14) 式を見ると αB^2 はほとんど $\rho_1+\rho_2$ に等しいことが分かる．したがって，

$$\alpha^2B^2 = 2\alpha\rho_0 \tag{911.21}$$

であり，(911.20) 式の定数因子は $1+(3/2)\alpha\rho_0$ と近似してよい．(911.20) 式の

第1項の積分から

$$\theta = \left(1+\frac{3}{2}\rho_0\alpha\right)\arc\cos\frac{t}{b} \tag{911.22}$$

が得られる．元の変数に戻すと

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}+b\cos\frac{\theta}{1+\frac{3}{2}\rho_0\alpha} \tag{911.23}$$

の形の解が得られる．楕円面でゆっくり歳差運動していることによる補正を別にすれば，この方程式は楕円軌道の方程式である．r が最小値をとるとき（近日点）の角度から次の近日点の角度の差は 2π ではなくて

$$2\pi+3\pi\alpha\rho_0 \tag{911.24}$$

となる．(*911.20*) 式の第2項の積分は，天体軌道の周期的なよわい摂動（観測するには弱すぎる）の原因であるが，あまり重要な意味を持たない．一方，近日点の移動は1周期ごとに観測され，周期を重ねて行けば観測できる値にまで大きくなる．

α の値を求めるに当たっては，§8の Poincare–Minokowski の現象論を利用することができる．この現象論は特殊相対性理論に基礎を置いていた．すなわち，惑星の運動にニュートンの方程式に特殊相対性理論の要請を適用しているが，その結果は速度が小さいときには古い理論に一致している．この理論のハミルトンの関数は (*98.8*) 式であたえられている．極座標を用いると（$\phi=\frac{1}{2}\pi$ のとき）

$$H=\frac{p_4^2}{(m+V/c^2)^2}-\frac{1}{(m+V/c^2)^2}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{r^2}\right) \tag{911.25}$$

と書かれる．ここで V はスカラー場のポテンシャルである（第5章 問題2を参照）．このハミルトンの関数を (*911.3*) 式のアインシュタインの理論のハミルトンの関数と比較すると $m=1$ の粒子で速度がそれほど大きくないとした場合に一致することが分かる．この場合には，分母の第1項は，2次以上を無視する近似で

$$1-2fM/(c^2r) \tag{911.26}$$

とすることができる．したがって，シュバルツシルドの線素 (*911.1*) の積分定

数は

$$\alpha = 2fM/c^2 \tag{911.27}$$

に等しい．f は重力定数，M は太陽の質量である．$2f/c^2$ の値は非常に小さい：

$$2f/c^2 = 1.481\times10^{-28}\,\mathrm{cm/gr} \tag{911.28}$$

この値に太陽の質量を掛けると太陽の「重力半径」が求められる：

$$\alpha = 2.94\times10^5\,\mathrm{cm} \tag{911.29}$$

である．この長さは天体間の距離に較べて小さいから，(*911.11*) 式以下で行った α/r に関する級数展開は正当化される．

太陽に最も近い水星の近日点移動は大きい．離心率を ε とすると

$$\rho_0 = 1/[a(1-\varepsilon^2)] \tag{911.30}$$

となり，近日点移動は

$$\eta = \frac{6\pi fM}{(1-\varepsilon^2)a} \tag{911.31}$$

であたえられることになる．これが，アインシュタインの理論の結果であり，水星の場合の実測値とよく一致している（1世紀ごとの近日点移動の計算値は 43.03±0.03(秒) であるのに対して観測値は 42.56±0.94(秒) である）[1)]．歳差運動の効果から g_{44} については2次近似までの表式と，g_{11} については1次近似での表式の正しさが検証できる点は興味深いことである．

§ 12.　光路の重力による曲り

光線は零円錐上の直線，すなわち長さがゼロの測地線と見なされるから，光の伝播は力学の問題である．測地線の原理を定式化するに当たってラグランジュの関数 (*910.3*) に質量 m を掛けておいてもよい．そうすると，(*910.4*) 式の右辺の値は1ではなくて m^2 になる．m を小さくして行けば粒子の運動は次第に光円錐に近付き，$m=0$ の極限では光円錐上の運動になる．このときハミルトンの関数はゼロになる．したがって，§ 10の考察で $H=1$ としたところを $H=0$ と置きさえすれば，ゼロ測地線の理論も含めることができる．(*91.19*) 式

1)　G. M. Clemence, Rev. Mod. Phys. 19,361 (1947)

に現れる唯一の違いは，分母の $-A^{-2}$ の項がないだけである．それゆえ，

$$\theta = -\int \frac{1}{\sqrt{1-\alpha\rho}} \frac{1}{\sqrt{B^2/(1-\alpha\rho)-\rho^2}} d\rho \tag{912.1}$$

が得られる．

まず最初に，αを無視した場合を考えて見よう．このときの積分は

$$\theta = \arccos(\rho/B),$$

あるいは

$$1/r = B\cos\theta$$

であり，これは

$$r\cos\theta = 1/B \tag{912.2}$$

と書ける．これが極座標表示での解であり，Bは光が太陽の近くを通過するときの最近接の距離である．r_0 の逆数であることが分かる：

$$B = 1/r_0 \tag{912.3}$$

次に，$\alpha\rho$ の2次の項からの寄与を無視する近似で

$$\theta = -\int \frac{1+\frac{1}{2}\alpha\rho}{\sqrt{B^2+\alpha B^2\rho-\rho^2}} d\rho \tag{912.4}$$

が得られる．ここで

$$\rho-\alpha B^2/2 = \xi \tag{912.5}$$

と置けば，近似の範囲内で，(912.4) 式は

$$\theta = -\int \frac{1+\frac{1}{2}\alpha\xi}{\sqrt{B^2-\xi^2}} d\xi \tag{912.6}$$

と書かれ，解は

$$\theta = \arccos\frac{\xi}{B}+\frac{1}{2}\alpha\sqrt{B^2-\rho^2} \tag{912.7}$$

であたえられる．

ここでrを無限大に近付ける無限（$\rho\to 0$）を考えると

$$\xi/B = -\alpha B/2 = -\alpha/(2r_0) \tag{912.8}$$

が得られる．余弦の値が負になる角度（$\pi/2$）より僅か大きい角度を求めなけれ

ばならない．この角度は，十分よい近似で

$$\theta = \pi/2+\alpha/(2r_0) \qquad (912.9)$$

である．屈折の方向は太陽の方に向いており，光線は非常に緩やかな双曲線になっていることと符合している．屈折角の大きさは

$$\eta = \alpha/(2r_0) = fM/(c^2 r_0) \qquad (912.10)$$

に等しい．この結果は，初等的なニュートンの理論を用いて求めた重力場の効果による光の屈折に対応している．これが，「等価原理」を用いて Einstein によって予言された光の屈折である．この結論は，彼が初期の段階で行った推測の指針となったものでもあり，重力場の存在する空間ではミンコフスキーの線素がもはや成り立たないことを確信させたものでもある．上に示したように，光の屈折は dx_4^2 の係数 g_{44} に関係しているのである．

(912.7) 式の右辺の第 2 項は，この他に g_{11} に関係している屈折が起こっていることを示している．この効果による屈折の大きさは，$\alpha/(2B)$ であり，前に求めた角度と合計すると

$$\eta = \alpha/r_0 = 2fM/(c^2 r_0) \qquad (912.11)$$

となる．したがって，線素の空間部分と時間部分の非ユークリッド性は，太陽の縁を通過する光線の場合には同じ大きさの屈折効果をもたらす．屈折による星の位置に見られる効果は，いま求めた値の 2 倍になる：

$$\delta = 2\eta = 4fM/(c^2 r_0) \qquad (912.12)$$

太陽の縁を通過する光に当てはめてみるとこの値は

$$\delta = 1.75\ (\text{秒}) \qquad (912.13)$$

となる．皆既日食の際に観測された光の屈折の結果は，理論値に十分近いものであった．

§ 13. 重力によるスペクトル線の赤色偏光

§ 2 でドップラー効果について解説した．この効果は，相対運動している 2 人の観測者が各自の時計を用いて光の信号の間の時間を測定したとき異なる結果を得ることに関係していた．2 人の観測者の測定した時間が t, t' であったとすると，振動数で表現したときのドップラー効果は

$$\nu/\nu' = t'/t \tag{913.1}$$

である．

次に，太陽から発して地球に到達する光の信号について考えてみよう．太陽の重力場は静的（g_{ik} は x_4 に依存していない）であるから，太陽の表面で記録された時間間隔 Δx_4 は地球に達するまで変化することはない．しかし，太陽の時計によって測られた固有時と地上で測られる固有時はおのおの

$$t = \sqrt{g_{44}}\,\Delta x_4, \quad t' = \sqrt{g_{44}'}\,\Delta x_4 \tag{913.2}$$

であるから，(913.1) 式は

$$\nu/\nu' = \sqrt{g_{44}'}/\sqrt{g_{44}} \tag{913.3}$$

と書ける．α の値は非常に小さいので

$$\sqrt{\frac{g_{44}'}{g_{44}}} = \frac{1-\alpha/2r'}{1-\alpha/2r} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) \tag{913.4}$$

と近似することができる．

$$\nu' = \nu + \Delta\,\nu \tag{913.5}$$

と置けば，この効果は

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\alpha}{2r} = -\frac{fM}{r} = -2.12\times10^{-6} \tag{913.6}$$

と表現される．($1/r$ に較べて $1/r'$ の方は無視できる)．したがって，太陽の発する光のスペクトルは，重力効果によって，低周波数側（すなわち，長波長側）にずれる．Einstein はこの効果を「等価原理」から演繹した．一般相対性理論においてもこの効果は，時空間のリーマン幾何学的性質として確立されている．

普通の条件下では，重力によるドップラー効果と運動によるドップラー効果とを分離することは困難である．太陽の赤色偏光は，0.64 km/sec 以上ではあり得ず，これを他の摂動の効果と区別することは困難である．この効果は，シリュウスの「伴星（暗黒)」のスペクトル観測によって確認された．二つの星の軌道が分かれば，それから星の質量を求めることができる．また，暗黒星の輝度からその半径を知ることができ，その表面での重力の大きさを知ることもできる．この星は「白色わい星」の仲間である．半径は地球と同程度であるが質量は太陽の質量ほどもあり，その密度は50,000にも達する．重力に伴う赤色偏

光の大きさも太陽の場合の40倍になり，十分観測できる値である．ウイルソン天文台の W. S. Adams[1] の入念な観測の結果は理論値とよく合っている（理論値は 26 km/sec であるが，観測値は 23 km/sec であった）．

〈文　献〉

ここに紹介する参考書は極一部である．

J.Aharoni : The Special Theory of Relativity (Clarendon Press, 1959)

P. G. Bergmann : Introduction to the Theory of Relativity (Printice Hall, 1947)

C. Møller : The Theory of Relativity (Clarendon Press, 1952)

W. Pauli : Theory of Relativity (Pergamon Press, 1958)

G. Y. Rainich : Mathematics of Relativity (Wiley, 1950)

W. Rindler : Special Relativity (Oliver and Boyd, 1960)

G. Stephenson and C. W. Kilmister : Special Relativity for Physicists (Longmans, Green, 1958)

J. L. Synge ; Relativity : The Special Theory (North-Holland, 1956)
The General Theory (North-Holland, 1960)

1) Astrophysical Journal 67,195 (1928) 参照．

—第 10 章

歴史的概観

力学の解析的原理についての満足のいくかつ目的にかなった歴史書はまだ手にすることができない．この主題を扱っていると主張している Duhring の本[1]も，この点に関する歴史にはほとんど触れていない．Mach の力学史は主として力学の物理学的原理に費やされており，解析力学の歴史としては決して満足できる本ではない．Mach[2]は先験的臭いのする事柄や彼が物理学と関連のない解析的方法に固有の価値を認めようとしなかった合理主義的考察を全く認めようとしていない．この50年間，実証主義哲学が科学思想に及ぼした大きな影響は，変分原理（思想史における崇高な成果）が科学者の間で決して熱狂的に迎えられたのではなく，単に力学現象を記述する道具に甘んじなければならなかったことに深く関係している．したがって，物理学のこの分野に光を当てた系統的で歴史的な書が今日まで書かれなかったこともうなずけることである*．Mayer[3]の本には，Maupertuis-Euler-Lagrange の業績に関しては言及されているけれども Hamilton から Jacobi への発展には触れていない．主として 19 世紀の新展開に属する部分について，本著者は Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften[4]の脚注に私見を述べておいた．Geiger-

1) E. E. Duhring ; Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik (Leipzig, 1877)

2) E. Mach ; The Science of Mechanics (Chicago, 1919)

3) A. Mayer ; Geschichte des Princips der klensten Altion (Leipzig, 1877)

〈*〉 Rene Dugas の労作 (Histire de la Mecanique, Neuchatel, 1950) の出版をみた今日では，この事情は変わってきた．この本には，ギリシャ時代から今日までの数学的認識と原理の発展をあとづけている．同じ著者の姉妹編 Lamecanique au XVII siede (1954) では，主として kepler, Galileo, Descartes, Huygens, Newton, Leibniz の時代の力学史が扱われている．

Scheel の Handbuch der Physik[5] に載せられている論説も優れたものであり，有益であるに相違ない．以下に示した歴史的概観は思考の発展の大筋を示すにすぎない．それゆえ，大きな貢献をした人々を中心にして幾つかのグループに分けてある．

Aristotle (384—322 BC)

明瞭ではないが仮想仕事の原理の最初の定式化は，Aristotle の「形而上学 (Physics)」に見られる．彼は，梃子の原理を「二つの力は速度に逆比例しているなら釣り合う」という原理から導いている．考察しているのは梃子の釣合である上に，速度に関した理論を用いているが力の小さな変化に伴う仮想仕事という思い付きがそこに含まれている．19世紀まで広く用いられてきた「仮想変位」という概念に代わる「仮想速度」という概念は，Aristotle が定式化したものである．同等の原理——「力で得した分量は速度で損した分量に等しい」——は，Stevinus (1598—1620) が滑車の釣合を考察するときに用いられた．

Galileo (1564—1642)

Galileo が力学に非常に重要な貢献をしたことはよく知られている．しかし，経験主義者 Galileo を実験的方法の父と強調するあまり，理論物理学者としての彼の偉大な業績を見落としがちである．彼は，Aristotle の原理を新しく定式化する仕事を通じて力学に大きな貢献をした．Galileo は，仮想仕事を定式化するに当たって，対象にすべき量は速さではなくてベクトル量である速度であるという重大な事実を見抜いた．彼の方法の要点は，「仕事」とは「力と力の方向への変化の積」であるという表現に集約されている．彼は，斜面での物体の釣合を調べるのに，仮想仕事の原理を適用し，Stevinus がエネルギー原理を使って証明した結論が再現できることを示した．彼はまた，重心の概念を用いて以前に Archimedes が証明した静水圧の原理が彼の方法でも証明できることを示

4) Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, IV, Mechnik (leipzig, 1904-1935), articles 12 and 13 by G. Prange.

5) Handbuch der Physik (Berlin, 1927), v, Mechanics of Points and Rigid Bodies; Chap. 1, "The Axioms pf Mechanics", by G. Hamel and Chap. 2, "The Principles of Mechanics", by L. Nordheim.

し，同様の原理が静水学の分野でも有効であることを示した．

John Bernoulli（1667—1748）

力の釣合の原理を用いる場合，当時までの扱い方ではいつも「動かす力」と「荷重による力」の二つの力を用いていた．このような場合には，釣合の法則は比例関係として表現することができた．仮想仕事の原理は，いかなる種類の釣合の問題をも扱うことのできる静力学の一般的原理の一つであることに気が付いたのは John Bernoulli であった．彼は比例関係式を使うのをやめて，力と仮想速度の積という概念を導入し，力と速度のなす角が鋭角であるのか鈍角であるかによって正または負の符号を付けた．1717年の Varignon への手紙の中で Bernoulli は幾つかの力が釣合の状態にあるためには，可能なすべての変位に対して力と変位の積の総和がゼロでなければならないという一般原理に言及している．この原理は，力の種類に関係なく成り立ち，かつ，いかなる力学的条件の下でも成り立つ．

Bernoulli には，もう一つ特筆すべき発見がある．彼は，力の場での粒子の運動を不均一媒質中の光の伝播と対比し，屈折率の力学的理論を仮想仕事の原理を利用して展開した．この意味で Bernoulli は，力学の最小作用の原理とフェルマーの原理はその結論においてきわめて特筆すべき類似性があり光現象を力学の言葉で逆に力学現象を光学の言葉で解釈できることを示した Hamilton の先駆者である．

Newton（1642—1727）

Leonard と Galileo の先駆的研究をもとにして，Newton は運動方程式を定式化した．運動学における基本的物理量は運動量と力であることが確立された．Newton の運動法則は，孤立した1粒子の運動の問題の解答をあたえる．どのような物体も孤立粒子の集まりと見なすことができるなら，このことは運動の問題に対する一般的解答でもある．しかし，作用している力すべてを知ることは可能でないという難点をもっている．この困難は，部分的には作用反作用の法則（第3法則）によって克服されている．剛体の運動の場合なら，この法則を用いて未知の力を排除することができる．しかし，複雑な拘束条件下にある

力学系になると，ニュートンの運動方程式はほとんど無力である．Newton 以後の科学者達は，三つの法則を完全でありかつ普遍的な自然法則であると考えニュートン自身も同意しなかったであろうドグマに持ち上げてしまった．ニュートン力学のこのような教条主義的崇拝は，多くの科学者をして18世紀のフランスの科学者が発展させていた解析的原理を先入観なしに評価することをはなはだ困難なものにした．Hamilton の業績ですらニュートン力学の前では同時代の科学者に認められることがなかった．

Leibniz（1646—1716）

Newton は運動の計量として運動量の時間変化の割合を用いることを提案したが，Leibniz は「vis viva」なる量について論じた．これは (1/2) なる因子を別にすると今日われわれが運動エネルギーと呼んでいるものに等しい．Leibniz は，ニュートン方程式を「運動エネルギーの変化は力のなす仕事に等しい」という内容の式に書き換えた．このアイデアは，後の解析力学の発展につながるものであった．運動エネルギーも仕事もどちらも1粒子の場合から任意の粒子も集まった系に一般化される概念である．力のなす仕事は，もう一つの基本的物理量である「ポテンシャル・エネルギー」(19世紀末に，Rankine が命名した）の符号を変えたもので置き換えられる．このことは，粒子が強く結合している力学系の運動を系統的に研究する際に大きな利点の一つとなるところであった．ポテンシャル・エネルギーのもう一つの利点は，スカラー量である上に作用する力の数にもそれらの性格にも制約されることなく全部を含めることができる点である．このことによって，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーに対して変分原理を適用できたのである．こうしてみると Newton と Leibniz の力に関する論争は，本質的には方法論のちがいでしかなかったのである．Newton の力の定義はベクトルを用いる力学に適していたし，Leibniz の定義は解析的方法の土台となったのである．

D'Alembert（1717—1785）

D'Alembert の手によって，力学系の解析的取り扱い方は大きな進展をみた．彼は，作用している力に運動自体が創り出す力を加えるという新しい方法を用

いるならどんな運動の問題も釣合の問題に還元できることを示した．新しい力は慣性力と呼ばれ，作用力と一体になって釣合の状態を創り出す．このことは，運動している力学系にも仮想仕事の原理が適用できることを意味している．力学系の運動方程式が一つの変分原理によって導出できるのである．

Maupertuis（1698—1759）

Maupertuis は自然界で生起するすべての現象には「作用」という基本となる量が存在するという仮説をたてた．この仮説の普遍性は，壮大な構想であり，18世紀の時代精神によく符号している．しかし，モウペルチューイの原理の数学的内容は彼の時代の学問の水準をはるかに越えていた．Maupertuis は最小にすべき量がどんな物であるかを十分に明らかにすることができなかった．彼は，弾性衝突の法則を導く際にもこの原理を用いている．この問題を最小値問題として解析するには非常に複雑であり洗練された手法の開発が必要である．Maupertuis は誤った方法を駆使しながらも，正しい結論に達している．彼の屈折の法則の導出の方は完全に正しく，そこで彼はフェルマーの最短時間の原理が最小作用の原理から導かれることを示している．この結果は，John Bernoulli がそれまでに導いていたものと同じであった．Mayer の書いた Maupertuis と Euler にまつわるエピソードは興味深い．Koenig は Leibniz が同様のアイデアを私信の形で述べていたと主張して Maupertuis の業績の先取性に疑問をなげかけた．この手紙は，遂に見つかることはなかった．次つぎと巻き起こった論争の中で，Euler は Maupertuis の先取性を最も熱心に主張した一人であった．ここで特筆すべき点は，Euler 自身も少なくとも1年前に Maupertuis と同じ原理をしかも全く正しい形で見つけていたということである．特に，Euler は実現した運動においても変分を受けた運動においてもエネルギー保存則が満たされていなければならないことをはっきり意識していた．この付加条件なしには，Maupertuis の作用という量は（たとえ総和を積分で置き換えようとも）本質的な意味を失ってしまう．Euler は Maupertuis の方法の弱点を知っていたかも知れないが，そのことにふれないだけでなくこの分野での自分の業績すら主張せず最小作用の原理の発見者は Maupertuis であるとしている．Euler の類希な才能と物事を正確に評価できる力を持ち合わせていた

ことを認めたにしても，このように遜った謙遜さは科学史上極めて希な例である．これと対照的な例は多い．

Euler（1707—1783）

Euler は，解析力学の発展史上に実に偉大な業績を残した．彼の剛体の回転運動の理論は，角速度の3成分を補助変数として用いた最初の例である．力学を変分原理を使って考察するとき，Euler の業績は高く評価される．Euler は変分問題の系統的考察からはじめた．微分学が誕生したばかりの時代にあって，極大極小の問題は名立たる科学者（Newton, Leibniz, James, John Bernoulli 等）によって数々の挑戦が試みられた問題であった．Euler はこれらの問題についての拡張された解を含む微分方程式を見つけた．Euler は Lagrange が完成させた形式で最小作用の原理を定式化こそしなかったけれども，力学的現象に対する変分原理の適用という面では Lagrange のものと同等である．

Lagrange（1736—1813）

18世紀最大の数学者 Lagrange の業績は，多くの点で Euler に匹敵する．Lagrange は，Euler とは異なる方法で極大極小の問題を解いた．彼はこの問題を解決するための新しい計算法を開発した．それが変分法と呼ばれているものに他ならない．彼は変分原理には力学系を記述する変数（一般化座標）としてどのような変数を選んでもよいという利点のあることに早くから気が付いていた．仮想仕事の原理やダランベールの原理の優れているところは，構成している粒子の細かなことにまで立ち入ることなく力学系全体として扱えることであるが，ラグランジュの運動方程式はそれの上にさらに重要な事柄を付け加えた．それは，ラグランジュの方程式が座標変換に関して不変であるという発見である．このことは，問題に即して最も都合のよい座標系を選んでよいことを意味している．彼の著書「解析力学」（1788年）のなかで，Lagrange は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーが抽象的にあたえられた場合にも物理的な事柄からも幾何学からも離れて単に計算を進めるだけで力学の問題が解けるというきわめて有力な方法を提案している．彼は，この輝かしい業績を発表するのに非常に控え目であった．序文には次のように書いている：「読者は，こ

の本には図表が一つもないことに気が付くであろう．これから述べる方法は，幾何学とか力学とかの知識を必要としない．単に，よく知られている計算術だけを必要とする代数演算の知識が必要なだけである」．Lagrange は解析力学の目標とその基礎を確立したのであった．

未定係数を用いて付加条件を取り扱う方法は，解析力学における Lagrange のもう一つの業績である．Hamilton は，Lagrnage の方法の見事さ，エレガントさ，それに奥の深さ等のゆえに，Lagrange を「力学における Shakespeare」と呼んで彼の業績を讃えている．

Hamilton（1805—1865）

Lagrnage の業績を越える真に新しい研究は，W. R. Hamilton によって手掛けられた．ラグランジュの運動方程式はどちらかといえば複雑な 2 階微分方程式である．Hamilton は，変数を 2 倍に増やすことでラグランジュの方程式を 1 階微分方程式の組に変えることに成功した．これらの方程式は変分問題に現れる微分方程式の中で最も簡単でかつ好ましい形式である．Jacobi は，これらの方程式の組を正準方程式と名付けた．

ダランベールの原理を変形して，最小作用の原理を最初に定式化したのも Hamilton であった．Euler と Lagrnage が用いた原理は，保存力学系にしか適用できない．Hamilton の業績の中で最も重要なものの一つは，力学の問題も幾何光学の問題も一つの統一的視点から捉えることを示した点である．彼は，幾何光学でも力学でも主関数と呼ばれる関数を用いた．この関数は，単に微分操作で質点や光線の軌道を決定するという優れた性質を持っている．そのうえ，主関数は力学の場合も光学の場合も同じ方程式を満たす．適当な境界条件を付けて解けばこの方程式の解は運動方程式の解と同等になる．

Jacobi（1804—1851）

Jacobi は，ハミルトンの方法の重要さとその見事さをすぐに認めた数少ない数学者の一人である．Jacobi は，正準方程式の変換理論（正準変換論）を展開した．彼は，変換論を用いて主関数の意味付けを行い，ハミルトンの主関数は正準変換を生み出す関数の一つにすぎないことを示した．すなわち，

Hamilton が用いたような特別の境界条件を用いなくても，ハミルトンの偏微分方程式の完全解は運動の完全な解答をあたえていることを証明した．このことによってハミルトンの偏微分方程式の有用さはぐんと増した．

Jacobi は，時間に依存した場合の最小作用の原理の新しい定式を確立した．彼は，Euler と Hamilton の定式化の弱点は積分領域が定区間での変分という条件を満たしていない点にあることを見抜いた．Euler と Lagrange は彼らの変分原理を全く正しく用いているのであったが，変分関数から変数としての時間を消去したヤコビの方法によって運動の時間経過を問うことなしに質点の軌道が決定できるという意味での新しい原理がはじめて導かれた．光線の軌道を決めるフェルマーの原理とヤコビの原理の類似性によって，光学と力学の現象の間の類似性も確証された．

Gauss（1777—1855）

いままで述べてきた流れと少し離れたところに，数学者 Gauss の確立した最小拘束の原理がある．この原理でわれわれは，極小にしたい関数として時間積分は用いないで任意の時刻で拘束と呼ばれる正の量を導入する．この時刻で位置と速度はあたえられたものと見なして，導入した量が最小になる条件で加速度を決定する．ガウスの原理は，単に停留値を決める原理ではなく，最小値を決定するという点で優れている．しかし，拘束という量には位置と速度だけでなく加速度まで含まれているので解析的な簡便さに欠ける．Hertz はガウスの拘束と呼ばれる量の幾何学的意味付けを試み，3N 次元の配位空間での測地線と結び付けようとした．この空間では，ガウスの原理は「最も直進性の強い経路の原理」と表現することができる．このように解釈すると，ガウスの原理とヤコビの原理は密接に関係していることが分かる．

解析力学のその後の発展

力学の変分原理の歴史を大まかに整理してみた．この章の目的はこれでほとんど達せられた．しかし，さらに多くの科学者が特別の場合にだけ適用するのでなく解析的手段を整えたり新たな面を付け加えたりした．以下，それらの幾つかを列挙しておく．

Poisson は，Lagrange とともに摂動理論に括弧記号を導入し正準理論の一般論の極近くまで達していた．Delaunay は多重周期系の解析的理論を展開した．この理論が，Bohr の原子論の基礎となった．E. J. Routh，そして独立に H. Helmholtz は循環変数の重要性とその消去法を確立した．J.J. Thomson は，消去される循環変数の存在を仮定して，力が前面に出てこないような力学の可能性について論じた．H. Hertz は，ポテンシャル・エネルギーは隠れた運動の運動エネルギーでないだろうかと考え Thomson のアイデアを系統的に展開した．力学系の運動を配位空間における粒子の運動と見なすことで力学の幾何学化を試みたのも Hertz であった．S. Lie は，無限小変換に注目し正準変換に群論の手法を持ち込むことに成功した．H. Poincare は，正準変換の不変量について研究した．彼は，天文学，特に三体問題の摂動理論でも大きな寄与をした．配位空間の幾何学の問題は Poincare の興味を大いに駆り立てたようであり，彼は位相的研究へと進んでいった．A. Appell は，非ホロノーム系を解析的に調べた．

解析力学のさまざまな側面での多くの科学者の貢献については，省略する．

今日の物理学から見た解析力学

現代物理学の偉大な成果，相対性理論と量子論，はどちらも解析力学によく似ている．アインシュタインの相対性理論は物理学の多くの分野に革命をもたらした．この理論は，速度が拘束に較べて小さいときにだけニュートン力学が成り立っていることを示した．しかし，最小作用の原理に基礎を置く解析力学の手法そのものは正当性を保ち続ける．変更しなければならないのはラグランジュの関数だけであり，運動が変分原理から決定されることには変わりない．実際，特定の座標系を用いなくても変分原理が定式化される点は，一般相対性理論の原理を定式化する上で特に有用である．この原理は，自然界の基本的な場の方程式は座標変換に関して不変でなければならないことを主張している．

現代物理学のもう一つの革命である量子論は，ハミルトン形式においてやはり解析力学と密接に関係している．電子軌道のボーアの理論では，量子条件を求める上で変数分離型の力学系の重要性が明らかになったとき Hamilton の理論が活用された．かつては Hamilton の方法はもっぱら天文学者だけが利用し

ていたが，1916年の Sommerfeld と Wilson による量子条件の定式化と同年の Epstein のシュタルク効果の解明によって，原子の構造を研究する上で Hamilton の概念がいかに重要であるかを示したといえよう．

Schrödinger, Heisenberg それに Dirac による波動力学（量子力学）を用いて自然法則を解釈するということも，Hamilton の方法から生まれたものである．共役変数と正準変換が量子論の基礎の重要な部分になっている．新たな特徴は，Heisenberg, Born, Jordan の理論によって共役変数にマトリックスの性質が付け加えられたことである．Dirac の理論では，共役変数は非可換な物理量として扱われる．一方，Schrödinger は，演算子（数学では，作用素という）の視点を取り入れてハミルトン・ヤコビの微分方程式を波動方程式と解釈したのであった．彼の理論の出発点には，Hamilton が示した光学と力学の類似性があった．

古典物理学の概念から大きく離れた新概念ではあったが，波動力学の基本的特徴が自己共役的であるということは，方程式は変分原理から導出できることを意味している．このように，解釈する際には大きな違いが見られるとはいえ力学の変分原理はすべての自然現象を記述する理論の基礎としての地位を保ち続けている．

第 *11* 章
連続体の力学

はじめに

この章では連続体力学の変分法の基本的事柄について述べる．方程式の解法とか変分法では扱うことのできない力が働いている場合などについてはここではふれない．これらに関しては参考文献を参照されたい．われわれの目的からすると，詳しい計算法よりも考え方の説明の方に比重を置くことになる．したがって，この章では理想流体力学，線型弾性体，電磁気学（マックスウエル理論）の基礎的考え方について要約する．ネーターの原理（これは今日では非常に重要な概念になってきているが，未だに不明瞭な面もあり誤解されているところもある）の結果からどのようにして保存則が導出されるかを解説する．

§ 1. 体積積分の変分

定積分の最小値（ないしは，停留値）を求めるという基本的問題がここでも中心的課題である．いままでの考察では，時間の関数である物理量 q_i と $\dot{q}_i$ に依存したラグランジュの関数 L（ハミルトンの形式では $L = T-V$）の時間積分の最小値を求めることであったが，今度は連続的に分布している物理量を対象にすることになるので体積積分と時間積分を含む変分問題になる．この点が一つの違いである．

変分問題は一般的に次のように定式化される．いま，作用積分

$$A = \int L d\omega \tag{1.1}$$

があたえられているとする．$d\omega$ は m 次元空間の体積要素である．ラグランジュの関数は，一般には

$$L = L(\phi_i, \partial\phi_i/\partial x_j ; x_k) \tag{1.2}$$

であたえられるから，質点系のラグランジュの関数と次の点が異なっている．ここでは $q_i = \phi_i$ は時間 t だけの関数ではなく m 個の変数 x_1, ……, x_m（多くの場合，デカルト座標を用いる）の関数でもある．したがって，体積要素は

$$d\omega = dx_1 \cdots\cdots dx_m \tag{1.3}$$

である．曲線座標を用いるならば

$$d\omega = \left\| \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} \right\| dx_1 dx_2 \cdots\cdots dx_m \tag{1.4}$$

としなければならない．(1.4) 式の因子は，ξ_i（デカルト座標）を曲線座標 x_k の関数として

$$\xi_i = \xi_i(x_1, \cdots\cdots, x_m) \tag{1.5}$$

と表したときの偏微分

$$a_{ik} = \partial\xi_i/\partial x_k \tag{1.6}$$

の行列式の値である．前章までの $\dot{q}_i$ は，今度は m 個の偏微分

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi_i}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \frac{\partial\phi_i}{\partial x_m} \tag{1.7}$$

で置き換えなければならない．実際上の応用では，$m = 3$ の場合（体積積分）と $m = 4$（時空間積分）の場合が興味ある例である．

線積分に関する変分法の幾つかの基本的性質は，ここでも有効である．

1. 変分と微分とは可換である（(29.3) 式参照）：

$$\delta\frac{\partial\phi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta\phi_i) \tag{1.8}$$

2. 変分と積分とは可換である（(29.5) 式参照）：

$$\delta\int_\Omega = \int_\Omega \delta \tag{1.9}$$

3. ここでも微分の変分を関数の変分に置き換えなければならない．このことは (210.4) 式に示した方法に類似しており，体積積分を表面積に変える積分変換の公式（ガウスの公式）を用いて行われる：

$$\int_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial x_i}d\omega \ = \ \int_{S}F(S)\nu_i dS \qquad (1.10)$$

ここで，ν_1，……，ν_m は面 S の法線ベクトルの m 個の成分であり，dS は面積要素である．法線ベクトルは，単位ベクトルで面 S に垂直であり外向きを正の向きとする．3次元の場合には，各成分を n_i，体積要素を $d\tau$ と記すことにする．

4．いままでに扱った場合と同様に，変数 ϕ_i について可逆な変分に対して積分の値が最小になるためには，1次の変分（適当な境界条件のもとで）はゼロでなければならない：

$$\delta\int L\left(\phi_i,\ \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\ ;\ x_k\right) \ = \ 0 \qquad (1.11)$$

§ 2.　ベクトル解析の公式

連続体力学を研究するに当たっては，ベクトルとテンソル解析の知識が不可欠である．ベクトルとテンソル解析は，微分形式の不変性を基礎としており，任意の座標系で基礎方程式を定式化できる利点を持っている．とはいえ，多くの場合3次元ベクトルの公式で十分である．これらは，成分に分解しないでベクトルのままで考察が進められ，何度も出てくる（直交座標系で計算される）基本的演算が大いに威力を発揮する公式である．それは，ハミルトンの「四元数解析」から導かれる．四元数解析（第9章 § 4. 参照）は，物理学に適用するために O.Heaviside（1894）と J.Gibbs（1901）によって一層使いやすい形式に改良された．ハミルトンの四元数の演算規則は，直交単位ベクトルの組（$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$）を回転して新しい組（$\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$）に変換しても（変換行列式の値は＋1としたとき）四元数は不変であるという興味深い性質を持っている．

通常われわれがベクトル $\boldsymbol{A}$ と呼んでいる量は，時間成分を持たない四元数に他ならない．Gibbs は，ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の四元数積を二つの量で置き換えた：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \ = \ \frac{1}{2}(AB-BA) \ = \ -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \qquad (2.1)$$

（ベクトル積という），および

$$A\cdot B = -\frac{1}{2}(AB+BA) = B\cdot A \tag{2.2}$$

（スカラー積という）．

Hamilton は，ナブラ演算子 ∇ を次の式で定義した：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}i+\frac{\partial}{\partial x_2}j+\frac{\partial}{\partial x_3}k \tag{2.3}$$

これは今日では，グラヂエント演算子と呼ばれており，grad とも書かれる．したがって，スカラー関数の勾配，すなわち，場の関数 ϕ にナブラ演算子を作用したものは，次のベクトルとして定義される：

$$\nabla\phi = \mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}i+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}j+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}k \tag{2.4}$$

一方，ベクトル A と ∇ のスカラー積は

$$\nabla\cdot A = \mathrm{div}\,A = \frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3} \tag{2.5}$$

であたえられ，A の発散（div）と呼ばれる．ベクトル A と ∇ のベクトル積

$$\nabla\times A = \mathrm{curl}\,A = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)i+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)j + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)k \tag{2.6}$$

はベクトル量であり，A の回転（curl，ないし rot）と呼ばれる．

以上の三つの演算子，grad, curl, div を組み合わせることで幾つかの大切な恒等式が求められる．それらは，定義に戻れば簡単に証明できるものばかりである．例えば，

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{curl}\,A = \nabla\cdot(\nabla\times A) = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\phi \tag{2.8}$$

（∇^2 はラプラスの演算子と呼ばれる），

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{grad}\,\phi = \nabla\times(\nabla\phi) = 0 \tag{2.9}$$

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\,A = \nabla\times(\nabla\times A) = -\nabla^2 A+\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,A \tag{2.10}$$

2個のベクトルのスカラー積に grad 演算子を作用させるときの重要な公式

がある．この公式は，座標系を回転して一方のベクトル（例えば，$\boldsymbol{B}$）の一つの成分 b_1 を残して他の成分は全部ゼロになる座標系を用いて導くことができる．すなわち，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(a_1 b_1)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial x_2}(a_1 b_1)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial x_3}(a_1 b_1)\boldsymbol{k} \\ &= \left(a_1\frac{\partial b_1}{\partial x_1}+b_1\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}+\left(a_1\frac{\partial b_1}{\partial x_2}+b_1\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{j} \\ &\quad +\left(a_1\frac{\partial b_1}{\partial x_3}+b_1\frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

ここで，括弧内の２番目の項だけを集めて次のように表すこともできる：

$$\left(b_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)a_1\boldsymbol{i}+\left(b_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)a_2\boldsymbol{j}+b_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{j} +\left(b_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)a_3\boldsymbol{k}+b_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{k},$$

これは，次のベクトル演算の結果に等しい．

$$(\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$$

最初の項についても同様にすれば（すなわち，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の役割を入れ換える），同様の公式が得られる．その結果から，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= (\mathrm{A}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{B} \\ &\quad +(\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる．ここで特に $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ と置くと

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{A} \tag{2.12}$$

となる．ベクトル積は，座標系の反転の下でその符号を変える．ベクトルの回転（curl）も同じ性質を持っている．しかし，(2.11) 式と (2.12) 式はベクトルの性質を持つ方程式である．

§ 3.　積分定理

連続体の力学では，次の積分変換がよく用いられる．その一つは，ガウスの

定理

$$\int_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \tag{3.1}$$

である．この公式で体積積分が面積分に変換される．ここで，S は領域 τ の境界面である．もう一つは，ストークスの定理

$$\int_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_s \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\, ds \tag{3.2}$$

である．この定理によって，面積分が線積分に変換される．ここで $\boldsymbol{t}$ は境界面 S の単位接線ベクトルであり，向きは法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の面 S を右に見ながら $\boldsymbol{t}$ の方向に進むときを正とする．

ヘルムホルツの定理（1858）も重要な公式である．任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}$（連続，微分可能であるとする）は，スカラー場 ϕ の勾配（「ソレノイド場」という）とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転（curl）（「渦場」という）の和として表すことができる．

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{curl} \boldsymbol{A} \tag{3.3}$$

全空間で $\boldsymbol{u}$ が定義されているなら，この分解は一意的である．ただし，渦場は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.4}$$

を満たすとする．(3.3) 式の発散（div）をとると

$$\nabla^2\phi = \operatorname{div} \boldsymbol{u} \tag{3.5}$$

が得られる．また，回転（curl）をとると，

$$-\nabla^2 \boldsymbol{A} = \operatorname{curl} \boldsymbol{u} \tag{3.6}$$

が得られる．右辺の値があたえられたとき，無限遠点で $\boldsymbol{u}$ が r^{-1} よりもすみやかにゼロに近づくならば，ポテンシャル方程式（ポアソンの方程式），(3.5)，は一意的な解を持つ．

発散のない場は渦場であり，回転を持たない場はソレノイド場であることが，分解定理の必然的結論として証明される．

§ 4.　質量の保存

質点系の力学において，力学軌道の変分からオイラー・ラグランジュの方程

式が得られた．このとき，質点の軌道に関して変分を施したが，質量の方は一定と仮定し変分をとらなかった．連続体力学では質量は連続的に分布しているとするが，この場合も質量の変分はとらない点に注意しよう．ここでは，液体の密度 ρ が基本的な物理量である．密度の定義は

$$dm = \rho d\tau \tag{4.1}$$

である．したがって，全質量は

$$m = \int_\tau \rho d\tau \tag{4.2}$$

であたえられる．

質量が一定であるということは，この積分が時間に依存しないことである．しかし，このことが成り立つのは，すべての質点が流線に沿って流れている場合，すなわち，流れに沿って運動している場合である．もし τ は一定であり流体中に静止しているならばいくらかの質量がこの領域の境界面を通して出入りするから m は一定ではなくなる．$\boldsymbol{v}$ を流速とすると，面 dS を単位時間に通過する流量は $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$ であたえられる．したがって，質量の保存則は

$$\frac{dm}{dt} + \int_s \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0 \tag{4.3}$$

が成り立つことを意味する．右辺の第 2 項は，ガウスの定理を利用して

$$\int_\tau \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})d\tau \tag{4.4}$$

と書くことができる．したがって，質量保存の法則は

$$\int_\tau \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]d\tau = 0 \tag{4.5}$$

と表される．この方程式が任意の τ に対して成り立っていなければならないから，被積分関数はゼロでなければならない．それゆえ，密度 ρ の方程式（連続の方程式）は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{4.6}$$

であたえられる．

§ 5. 理想流体の流体力学

流体の微視的構造や流体粒子の分子的性質に立ち入らず，流体を巨視的視点から理論的に考察する．巨視的運動が微視的運動の自由度に転換されることに関係する粘性のある流体には，統計力学の諸原理を用いなければならない．それゆえ，摩擦力は巨視的視点での変分法の適用領域をはみ出した対象である．以下では，摩擦の効果が無視されている「理想流体」（気体も含む）に限定して考察を進める．

変分法の利点の一つは，拘束力についての知識を特に必要としない点であった。流体の場合，全体積を一定に保っている限り流体を変形させる力は非常に小さいことを知っておけば十分である．体積を変化させるときの力は，これに比べて非常に強い．したがって，

$$\tau = \int dx_1 dx_2 dx_3 \tag{5.1}$$

を一定に保っている限り，流体粒子の位置を自由に変えてもよい．

さて，位置座標 x_i から $x_i+\delta x_i$ への変位は，直交座標系から曲線座標系への無限小変換と見なすことができる．行列式 (2.6) の対角成分は

$$a_{ii} = 1+\partial(\delta x_i)/\partial x_i \tag{5.2}$$

であり，行列式の値は

$$\|a_{ik}\| = 1+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta x_i) = 1+\mathrm{div}(\delta \boldsymbol{x}) \tag{5.3}$$

であたえられる（2次のオーダーを無視した）．したがって，体積の変分は

$$\delta\tau = \int \mathrm{div}(\delta \boldsymbol{x})d\tau \tag{5.4}$$

であたえられ，任意の体積の変分は消えるという付加条件は

$$\mathrm{div}(\delta \boldsymbol{x}) = 0 \tag{5.5}$$

で表される．

§ 6. ラグランジュ形式での流体力学的方程式

Lagrange は流体の問題を粒子の運動との類似を利用して考察した．微小体

積 $d\tau$ の質量は

$$dm = \rho d\tau \tag{6.1}$$

であたえられ，運動エネルギーは

$$T = \rho v^2 d\tau/2 \tag{6.2}$$

であたえられるとする．この体積要素でのポテンシャル・エネルギーは

$$V = \rho\phi d\tau \tag{6.3}$$

である．ϕ はニュートンの重力ポテンシャルである．したがって，変分法に現れる積分は

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \rho\left(\frac{1}{2}v^2 - \phi\right) d\tau dt \tag{6.4}$$

となる．力学系の全粒子に関して総和をとれば変分関数は時空間の 4 重積分として書かれる：

$$A = \int_{t_1}^{t_2}\int_\tau \rho\left(\frac{1}{2}v^2 - \phi\right) d\tau dt \tag{6.5}$$

これに付加条件 (5.5) を加味しなければならないが，そのためにはラグランジュの未定係数法が使える．未定係数を p として

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\tau p \operatorname{div}(\delta \boldsymbol{x}) d\tau dt \tag{6.6}$$

を (6.5) 式に付け加えるだけでよい．ここで

$$p \operatorname{div}(\delta \boldsymbol{x}) = \operatorname{div}(p\delta \boldsymbol{x}) - \operatorname{grad} p \cdot \delta \boldsymbol{x} \tag{6.7}$$

が成り立つことに注意しよう．第 1 項はガウスの定理 (3.1) を用いて面積分に変換されるから，最終の結果には影響を及ぼさない．したがって，作用積分は

$$A' = \int_{t_1}^{t_2}\int_\tau \left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 - \phi\right) - \operatorname{grad} p \cdot \delta \boldsymbol{x}\right] d\tau dt \tag{6.8}$$

と書くことができる．変分に関して質量の変分はとらないという条件は

$$\delta(\rho d\tau) = 0 \tag{6.9}$$

である．よく知られた方法に従って A' の変分をとれば

$$-\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \rho \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} p = 0 \tag{6.10}$$

あるいは

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, \phi - \frac{\mathrm{grad}\, p}{\rho} \tag{6.11}$$

が求められる．

この方程式の特徴は，非圧縮性を仮定していたにもかかわらず圧縮性流体に対しても成り立つという点である．ここに拘束条件を「微視的に見れば破っていること」に関係していたラグランジュの未定係数法の非常に意味深長な側面を見るのである．上記の場合には，圧縮に抗するポテンシャル障壁は高次の効果が無視して差し支えないほど十分に高いから，破れの度合いが巨視的になったとしてもよいのである．

§ 7. 流体静力学

流体が静止している場合は $\boldsymbol{v} = 0$ であり，

$$\mathrm{grad}\, \phi + \frac{\mathrm{grad}\, p}{\rho} = 0 \tag{7.1}$$

が得られる．非圧縮性流体の場合には密度 ρ は一定（$= \rho_0$）であるから，(7.1) 式は

$$\phi + p/\rho_0 = \text{一定} \tag{7.2}$$

となる．水面下 z でのニュートンのポテンシャル ϕ は

$$\phi = -gz \tag{7.3}$$

であたえられるから，静水圧中 p は

$$p = \rho_0 g z \tag{7.4}$$

となる（アルキメデスの原理，200 BC）．上空 z の空気の場合には

$$\phi = gz \tag{7.5}$$

$$p = p_0 - \rho_0 g z \tag{7.6}$$

となる．p_0 は海抜 0 m での気圧であり，水銀柱 760 mm の高さに該当する値である．海抜 0 m での乾燥した空気の密度は $\rho_0 = 0.001224\ \mathrm{g/cm^3}$（0 度C）であり，水銀の密度は $13.60\ \mathrm{g/cm^3}$ である．したがって，大気圧は水銀柱で測ると（単位は mm）

$$p = 760 - 0.900\, z \tag{7.7}$$

となる．z の単位はメートルをとった．この式は，海抜が 11 m 高くなるにつれて大気圧が 1 mm ずつ減少することを示している（Pascal, 1648）．空気には圧縮性があり密度と圧力の間には関係がある．等温条件の下では

$$p/\rho = p_0/\rho_0 \tag{7.8}$$

である．密度が圧力の関数であるとき（順圧流体という），

$$\frac{\operatorname{grad} p}{\rho} = \frac{\operatorname{grad} p}{f(p)} = \operatorname{grad} P \tag{7.9}$$

となる．ただし，

$$P = \int \frac{dp}{f(p)} \tag{7.10}$$

である．P は順圧と呼ばれる．等温の大気の場合にはこの値は

$$P = \frac{p_0}{\rho_0}\int\frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0} = \frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{\rho}{\rho_0} \tag{7.11}$$

となる．静水平衡のときには，

$$\phi + P = 一定 \tag{7.12}$$

であるから，大気を例にとると

$$gz + \frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p}{p_0} = 0 \tag{7.13}$$

であり，結局，

$$p = p_0 e^{-\alpha z} \tag{7.14}$$

が得られる．ここで定数 α は，

$$\alpha = \rho_0 g/p_0 = 0.1184\cdot 10^{-5}\,\mathrm{cm}^{-1}$$

である．等温で 0 ℃ の大気の高さ z での圧力は単位を km にとって

$$p = p_0 e^{-0.1184z} \tag{7.15}$$

であたえられる（Laplace, 1817）．

§ 8. 渦 定 理

流体中の一群の粒子の運動とともに動いている閉曲線 L を思い浮かべてみよう．すなわち，物質線というものについて考えるのである．この閉曲線は時

間を止めたときパラメータ s を用いて

$$x_i = x_i(s) \tag{8.1}$$

と表すことができる．したがって，時刻 $t+dt$ での物質線は

$$x_i = x_i(s)+v_i(s)dt \tag{8.2}$$

ということになる．この閉曲線に沿った「循環」を考えてみよう．これは線積分

$$\int_s \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,ds = \int_s \sum_{i=1}^{3} v_i dx_i \tag{8.3}$$

で定義される．時刻 $t+dt$ での値は

$$\int_s \Sigma(v_i+\dot{v}_i dt)\left(dx_i+\frac{dv_i}{ds}dsdt\right) \tag{8.4}$$

となる．この二つの循環の差は

$$\int_s \Sigma\left(\dot{v}_i dx_i+v_i\frac{dv_i}{ds}ds\right)dt \tag{8.5}$$

に等しい．第2項を変形すると

$$\int_s d\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}^2)_s-\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}^2)_0 = 0 \tag{8.6}$$

となるから，結局

$$\int_s \Sigma\dot{v}_i dx_i dt = \int_s \dot{\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{x}\,dt \tag{8.7}$$

だけが残る．一方，ラグランジュの運動方程式 (6.11) を利用すると，この量は

$$-\int_s \mathrm{grad}(\phi+P)d\boldsymbol{x}dt = [(\phi+P)_0-(\phi+P)_s]dt = 0 \tag{8.8}$$

となることが分かる．これは，物質線 L に沿った循環は時間がたっても変化しないことを示している．この結果は，任意の物質線で成り立つ（Helmholtz, 1858）．これは，完全流体の循環保存の定理であり竜巻や台風の大きな力の由来を説明している．

次に，物質線 L を境界線とする任意の面 S を流体の内部にとってみよう．ストークスの定理により今度は線積分 (8.3) が面積分

$$\int_S (\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{8.9}$$

に等しくなる．面 S は流体とともに運動している限り，この量は運動の恒量になっている．

閉曲線に沿って定義された循環の値がゼロであったとすると，そのときには

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{8.10}$$

である．すなわち，流体は非回転運動をすることを物語っている．そのうえ，この条件はいつまでも保たれている．

§ 9.　オイラーの見方での流体力学的方程式

ラグランジュ形式での流体力学的方程式において，われわれは流体粒子の速度と加速度について考察した．時間微分 d/dt は，同一の粒子の位置座標に作用するとした．オイラーの見方では，静止している直交座標系が用いられる．速度場は，空間の任意の固定点で定義されている．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3, t) \tag{9.1}$$

密度や速度などの物理量も同様に時空間の点の関数であるとする．今度は演算子 d/dt は，演算子 $\partial/\partial t$ と次のような関係にある：

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}+v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad} \tag{9.2}$$

この結果，オイラーの見方でのラグランジュの方程式 (6.11) は

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial t+(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\mathrm{grad}(\phi+p) \tag{9.3}$$

となる．右辺の第2項に恒等式 (2.12) を用いて

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}^2/2-\boldsymbol{v}\times\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v} \tag{9.4}$$

が得られる．したがって，オイラーの見方での完全流体の運動方程式は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{v}\times\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}-\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+\phi+P\right) \tag{9.5}$$

であたえられる．

非線型項が現れ，たとえ完全流体の場合でもこの方程式の厳密解を求めることは大変にむずかしい．速度が十分に小さい場合なら，2次の項は無視するこ

とができ，(9.5) 式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}(\phi+P) \tag{9.6}$$

と近似することができる．連続の方程式 (4.6) も非線型方程式であるけれどもこちらでも密度 ρ の変化が小さいと仮定すれば，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho_0 \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.7}$$

と近似される．この式に (9.6) 式を代入すると

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}+\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.8}$$

が得られる．ニュートンのポテンシャルの ∇^2 を作用するとゼロになることに注意し (9.6) 式の発散 (div) をとって (9.8) 式に代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho = \rho_0 \nabla^2 P \tag{9.9}$$

が得られる．

理想気体の場合には，等温条件が満たされている限り圧力 P を (7.11) 式で置き換えてよい．さらに，密度変化は ρ_0 に比べて十分に小さいから

$$P = \frac{p_0}{\rho_0}\log\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) = \frac{p_0}{{\rho_0}^2}\Delta\rho \tag{9.10}$$

と置いてよい．この場合には，(9.9) 式は

$$\frac{p_0}{\rho_0}\nabla^2\Delta\rho = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\rho \tag{9.11}$$

となる．$\Delta\rho = \rho_1$ と書けば，この方程式は波動方程式

$$\nabla^2\rho_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \tag{9.12}$$

であることが分かる．音速 c は

$$c = \sqrt{(p_0/\rho_0)} \tag{9.13}$$

である．この式は，大気中の密度変化の波（圧力変化の波といってもよい）が発生していることを示しており，伝播速度は（0 ℃ の乾燥した大気の場合）

$$c = 284.5\ \mathrm{m/s}$$

であることが分かる．この数値は Newton が最初に求めた値であるが実測値に比べて少し低い値である．気体の体積変化の現象は等温的ではなく断熱的である．なぜならば，熱をやり取りするに十分な時間がなく，気体を圧縮するときには熱が発生し膨張するときには冷却されるからである．Laplace (1817) はこのことを考慮して上記の公式を修正した．断熱条件での密度と圧力の関係は

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad \rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \tag{9.14}$$

であたえられることが知られている．定数 γ は定圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比である．このことを用いると (7.11) 式は

$$P = \int\frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\frac{p_0^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\frac{\gamma}{\gamma-1} \tag{9.15}$$

となる．ここで再び密度変化が十分に小さいと仮定すれば，

$$P = \frac{p_0}{\rho_0}\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{p_0}{\rho_0}\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{p_0\Delta\rho}{\rho_0^2}\gamma \tag{9.16}$$

であることが分かる．したがって，(9.9) 式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_1 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}\nabla^2\rho_1 \tag{9.17}$$

と書かれることになり，音速は

$$c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} \tag{9.18}$$

であたえられる．大気の γ の値は，$\gamma = 1.41$ であるから，音速は

$$c = 337.7\ \mathrm{m/s} \tag{9.19}$$

であたえられ，これは実測値によくあっている．

§ 10.　エネルギー保存則

多くの力学現象において運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和は常に一定であるから，理想気体の場合でもこのことが簡単に証明されると思われるかも知れない．しかし，実際には流体粒子間に働くポテンシャル・エネルギーの存在による複雑な問題がある．ラグランジュ方程式 (6.11) の両辺に $\boldsymbol{v}dt = d\boldsymbol{x}$ を掛けると

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right)+d\phi+dP = 0 \tag{10.1}$$

が得られる．これがエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}v^2+\phi+P = \text{一定} \tag{10.2}$$

を証明しているかに見える（D. Bernoulli, 1738）．しかし，この式を導出する際に圧力 P が時間に依存している点が考慮されていなかった．定常的な大気に限って，(10.2) 式は正しい．流体が定常的であるとは

$$\partial v/\partial t = 0 \tag{10.3}$$

が成り立つ場合である．速度以外の物理量の時間による偏微分もゼロになる．換言すれば，流体粒子は絶えず運動していて一つの粒子の位置には他の粒子が移ってくるので空間の固定点での力学量は同じ値に留まる．この場合，P は時間に依存しないから (10.2) 式が成り立つ．しかし，(10.2) 式の右辺には流線に沿った運動に限定していることに関係する定数が追加されなければならない．この定数は，流線ごとに異なる値をとる．

流体の運動が非回転的である場合には，この他にも幾つかの結論が引き出せる．この場合の速度は

$$v = \mathrm{grad}\ \Phi \tag{10.4}$$

と表される．Φ は「速度ポテンシャル」と呼ばれる．これを用いてオイラーの方程式 (9.5) は

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+\phi+P\right) = 0 \tag{10.5}$$

と書くことができる．この方程式の解は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+\phi+P = \gamma(t) \tag{10.6}$$

である．右辺の定数 $\gamma(t)$ は時間の関数であるがどの流線にも共通の値を持つ．非回転的でかつ定常的な流体ならば，$\partial\Phi/\partial t = 0$ であるから

$$v^2/2+\phi+P = \text{定数} \tag{10.7}$$

が成り立っている．右辺の定数は，すべての流線で共通の値をとるだけでなく時間にも無関係である．これが狭義のベルヌイの方程式である．

〈文　献〉

Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed. (Cambridge University Press, 1932).
McLeod, E. B., *Introduction to Fluid Dynamics* (Pergamon Press, 1963).
Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, London, 1949).
Serrin, J., *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, Encyclopedia of Physics, VIII/1 (Springer, Berlin, 1959).

§ 11. 弾性. 数学的手段

流体力学はベクトル解析を用いて展開できたが，弾性理論においてはテンソル解析を利用しなければならない．ベクトルがどのようなものであるかを思い浮かべることはたやすいことであり，成分に分けて扱うよりもひとまとめにして扱う方が自然である．テンソル場については事情は異なってくる．成分に分解しないでテンソルをひとまとめにして扱うことにはほとんど利益はなく，明解さまで失ってしまう恐れがある．テンソル解析は，添字に関する演算である．これに関しては，Einstein の「総和の約束」が広く用いられている．これは，同じ添字が2回現れた場合にはそれらについての和をとる簡便法である．この約束を用いると，煩雑な総和記号（Σ）を用いなくとも，テンソル解析の公式を導くことができる．総和は非相対論の場合には3個の空間座標について行うが相対論の場合には時空間の4個の成分について行う．以下では，この便法を用いる．テンソル解析は，任意次元数の曲線座標においても展開できるが，ここでは直交変換のデカルト群（直交座標系）に限っておく．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，解析的には1次形式

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = a_i x_i$$

が，任意の直交変換によって新しい座標系 x'_1, x'_2, x'_3 に移っても不変であるという要請によって定義される：

$$a_i x_i = a'_i x'_i \tag{11.1}$$

同様に2次形式

$$a_{ik} x_i x_k = a'_{ik} x'_i x'_k \tag{11.2}$$

を考えることもできる．ここで，テンソル成分を $a_{ki}=a_{ik}$ と置き，「2階」の対称テンソルが定義できる．非対称テンソル $a_{ki}\neq a_{ik}$ を定義するには「双1次形式」$a_{ik}x_iy_k$ の性質を用いる．一般に r 階テンソルを定義するときは，r 個の変数に関して線型な不変形式を用いる．a_{ik} から a'_{ik} への変換則は積 x_ix_k から $x'_ix'_k$ への変換則と同じであることは容易に示せる．

定義から，階数が同じテンソルの間では加法が定義できる．例えば，

$$a_{ik}+b_{ik}=c_{ik} \tag{11.3}$$

階数の異なるテンソルの間での積も定義できる：

$$a_ib_{km}=c_{ikm} \tag{11.4}$$

新しいテンソルの階数はおのおののテンソル階数の和に等しい．

テンソル a_{ikmn} を考える．ここで添字が等しい場合にはその添字については和をとると約束する．例えば，

$$a_{iimn} \tag{11.5}$$

は i について総和をとることを意味する．この量の変換則は

$$x_iy_iz_mu_n \tag{11.6}$$

の変換則と同じである．しかし，x_iy_i はベクトル x, y のスカラー積であり，直交変換の不変量である．したがって，(11.6) の変換則は z_mu_n の変換則と同じであり，結局，a_{iimn} は2階テンソルの成分であることが分かる．このことが，テンソル縮約である．つまり，テンソルの階数は縮約をとると階数が二つ下がる．

クロネッカーの記号

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= 1, \qquad (i=k \text{ のとき})\\ &= 0, \qquad (i\neq k \text{ のとき})\end{aligned} \tag{11.7}$$

は直交変換の2階対称テンソル成分である．なぜなら，

$$\delta_{ik}x_ix_k=x_i^2=x'^2_i=\delta_{ik}x'_ix'_k \tag{11.8}$$

が成り立つからである．

dx_i と x_i の変換則は同じであるから，$a_{ik}y_iz_k$ は微分形式

$$a_{ik}dx_idy_k\equiv a'_{ik}dy'_idz'_k \tag{11.9}$$

で置き換えることができる．もし成分 a_{ik} が場所依存性を持つテンソル場であり，直交座標系で連続かつ微分可能であるとする（a'_{ik} についても同様）と，近

接する2点で (11.3) 式の差をとれば

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_m} dx_m dy_i dz_k \equiv \frac{\partial a'_{ik}}{\partial x'_m} dx'_m dy'_i dz'_k \tag{11.10}$$

が得られる．テンソルの定義からこれは3階のテンソルである．すなわち，テンソル場の微分は階数が一つだけ上がったテンソル場である．

§ 12. 歪みテンソル

固体に強い力を加えて，体積だけでなく形状まで変えてしまうこともできる．この場合，固体の一部分を単に変位させたり回転させたりするだけでは，反作用の力が作り出せないであろう．弾性の問題は，本質的に幾何学的問題である．点 x_i での弾性変位 $u_i(x_1, x_2, x_3)$

$$\bar{x}_i = x_i + u_i \tag{12.1}$$

と変位の前後での近接する2点間の無限小の距離（線素）を考える．直交座標系ならば変位前の値は

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i^2 = \delta_{ik} dx_i dx_k \tag{12.2}$$

であたえられる．変位後の値は

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= (dx_i + du_i)^2 = dx_i^2 + \partial dx_i du_i + du_i^2 \\ &= \left[\delta_{ik} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right] dx_i dx_k \end{aligned} \tag{12.3}$$

である．これら二つの差からテンソル

$$2\sigma_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \tag{12.4}$$

が求められる．これは「歪みテンソル」と呼ばれる．歪み成分（次元をもたない）は，普通は小さな値であり，右辺の最後の非線型項は無視できる．その結果，

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \tag{12.5}$$

となる．

弾性エネルギーの密度は歪み成分の2次形式として

$$W = \frac{1}{2} c_{ikmn} \sigma_{ik} \sigma_{mn} \tag{12.6}$$

と表される．W はスカラー量であり，座標系の回転に関して不変でなければならないので係数 c_{ikmn} は4階テンソルである．歪み成分 $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ の数は6個であるから，6次元空間での $(6\times7)/2 = 21$ 個の独立な係数を持った2次形式が得られる．一般に結晶の場合には座標系をうまく選べば18個にまで減らすことができるけれども，これら係数全部を用いなくてはならない．高い対称性を持つ結晶ならもう少し成分を少なくすることができる．例えば，軸対称性（x_3 軸とする）の結晶では弾性エネルギー密度 W は，

$$W = \frac{1}{2}\Big[c_1({\sigma_{11}}^2 + 2{\sigma_{12}}^2 + {\sigma_{22}}^2) + c_2(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + c_3{\sigma_{33}}^2$$

$$+ c_4(\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma_{33} + c_5({\sigma_{13}}^2 + {\sigma_{23}}^2) \Big] \tag{12.7}$$

の形式だけが許される．軸対称の結晶では，係数を6個まで減らすことができる[1]．

等方的な力学系では，4階テンソル $\sigma_{ik}\sigma_{mn}$ からテンソル解析を利用してスカラー量を捜さなければならない．まず，$i = k,\ m = n$ としたときには，スカラー

$$\sigma_{ii}\sigma_{mm} = (\sigma_{ii})^2 = \sigma^2$$

が得られる．ここで，$\sigma = \sigma_{ii}$ と置いた（ポアソン比と混同しないこと）．一方，$i = m,\ k = n$ と置くと，

$$\sigma_{ik}\sigma_{ik} = (\sigma_{ik})^2 \tag{12.8}$$

が得られる．したがって，等方物体の弾性エネルギー密度は

$$W = \frac{1}{2}\Big[\lambda\sigma^2 + 2\mu(\sigma_{ik})^2 \Big] \tag{12.9}$$

であたえられることになる．λ と μ は Lame 定数（弾性定数）と呼ばれる．多くの固体は，方向のまちまちな結晶の集まりと見なすことができよう．このような固体は，微視的には結晶であるが巨視的には等方物体と見なすことができる．

1)　J. L. Synge, Journal of Mathematics and Physics, 35(1957), 323.

§ 13.　応力テンソル

次に，歪みの加えられた弾性体について考える．平衡状態ではポテンシャル・エネルギーは最小でなければならない．まず，われわれは弾性エネルギーの1次の変分を計算しておかなければならない：

$$\delta\int w d\tau = \int[\lambda\sigma\delta\sigma+2\mu\sigma_{ik}\delta\sigma_{ik}]d\tau \tag{13.1}$$

ここで

$$\delta\sigma = \delta\sigma_{ii} = \frac{\partial\delta u_i}{\partial x_i},\ \delta\sigma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\delta u_k}{\partial x_i}\right) \tag{13.2}$$

と置いた．ガウスの公式 (3.1) を利用すると

$$\delta\int w d\tau = -\int_\tau\left[\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\delta u_i+2\mu\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\right]d\tau$$
$$+\int_S[\lambda\sigma n_k\delta u_k+2\mu\sigma_{ik}n_k\delta u_i]dS \tag{13.3}$$

が得られる．ベクトル記号で表すと第1項の被積分関数は

$$-[\lambda\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})+\mu(\nabla^2\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})]\cdot\delta\boldsymbol{u} \tag{13.4}$$

と書ける．これに重力ポテンシャルの変分を追加しなければならない．それは

$$\rho\,\mathrm{grad}\,\phi\cdot\delta\boldsymbol{u} \tag{13.5}$$

に等しい．したがって，弾性平衡の条件は

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = \rho\,\mathrm{grad}\,\phi \tag{13.6}$$

であたえられる．(13.4) 式で歪みテンソルの表式 (12.5) を代入しなかったとすると，(13.6) 式は

$$\lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}+2\mu\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{13.7}$$

と書ける．この式の左辺は，一つの量の勾配 (grad) に等しい：

$$\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k} = \rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{13.8}$$

ここで

$$\tau_{ik} = \lambda\sigma\delta_{ik}+2\mu\sigma_{ik} \tag{13.9}$$

と定義される「応力テンソル」である (Cauchy, 1822)．

ベクトル方程式 (13.6) を解くためには，適当な境界条件を設けなければならない．もし，境界は固定されているのであればそこでの変位 $\boldsymbol{u}$ はゼロでなければならない：

$$\boldsymbol{u}(S) = 0 \tag{13.10}$$

自由境界部分 S' については面積分 (13.3) から条件

$$\tau_{ik}n_k = 0 \tag{13.11}$$

が得られる．境界の単位面積当たりに力 f_i が働いているとすると，この力の仮想仕事は

$$\int f_i \delta u_i dS \tag{13.12}$$

に等しい．このことによる境界条件は，

$$\tau_{ik}n_k = f_i \tag{13.13}$$

と書ける．

§ 14. 弾性振動

上記の変分問題に $L = T - V$ の形で運動エネルギーを追加すると，(13.6) 式には加速度の項が加わり，小さな変位に関しては次の運動方程式が得られる：

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \rho\operatorname{grad}\phi \tag{14.1}$$

（右辺の最後の項は，通常は無視される）．

$\boldsymbol{u}$ を回転成分と勾配成分とに分解する：

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\phi \tag{14.2}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対しては波動方程式

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{14.3}$$

が，またスカラー ϕ に対しては方程式

$$\rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla^2\phi \tag{14.4}$$

が得られる．スカラー波（ソレノイド波）の伝播速度は

$$c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho} \tag{14.5}$$

ベクトル波（渦の波）の伝播速度は，

$$c_2 = \sqrt{\mu/\rho} \tag{14.6}$$

であたえられる．これらの波は，地震波として観測されている．

§ 15. 変分問題のハミルトン形式化

ラグランジュの2階微分方程式を1階微分方程式系に還元するハミルトンの方法は，固体弾性の問題にも適用できる．方程式の数は必ずしも2階微分方程式のちょうど2倍である必要はない．しかし基本的考え方は，簡単な演算を用いるだけで展開できる．弾性エネルギー密度 W を，

$$W = (\lambda\sigma_{ii}\sigma_{kk}+2\mu\sigma_{ik}^2)/2 \tag{15.1}$$

であるとしよう．ただし，付加条件は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)-\sigma_{ik} = 0 \tag{15.2}$$

である．この付加条件はラグランジュの未定係数 τ_{ik} を導入して処理できる．その結果は，

$$\tau_{ik}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)-\sigma_{ik}\right] \tag{15.3}$$

であるが，τ_{ik} は対称であると仮定するとこの値は，

$$\tau_{ik}(\partial u_i/\partial x_k-\sigma_{ik}) \tag{15.4}$$

となる．結局，ラグランジュの関数は $u_i, \tau_{ik}, \sigma_{ik}$ を変数として

$$W' = [\lambda\sigma^2+2\mu\sigma_{ik}^2]/2+\tau_{ik}(\partial u_i/\partial x_k-\sigma_{ik}) \tag{15.5}$$

であたえられる．しかし，W' は σ_{ik} に関しては単に代数的であるから，簡単に消去できる（第5章　問題12，参照）；

$$\frac{\partial W'}{\partial\sigma_{ik}} = \lambda\sigma\delta_{ik}+2\mu\sigma_{ik}-\tau_{ik} = 0 \tag{15.6}$$

この結果を利用すると，ラグランジュの関数は

$$W' = \tau_{ik}\partial u_i/\partial x_k-H \tag{15.7}$$

と表される．ここでハミルトンの関数 H は

$$H = \tau_{ik}\sigma_{ik} - \frac{1}{2}\tau_{ik}\sigma_{ik} = \frac{1}{2}\tau_{ik}\sigma_{ik}$$

$$= \frac{1}{4\mu}\left(\tau_{ik}{}^2 - \frac{1}{3\lambda+2\mu}\tau^2\right) \tag{15.8}$$

と置いた．

この形式から分かることは，未定係数 τ_{ik} が応力テンソルに等しく，応力テンソルがいかに重要であるかということである．u_i の変分には，面積分

$$\int \tau_{ik} n_k \delta u_i dS \tag{15.9}$$

と

$$-\partial\tau_{ik}/\partial x_k \tag{15.10}$$

が現れる．そのうえ，τ_{ik} に関する変分からは

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2\mu}\left(\tau_{ik} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\tau\delta_{ik}\right) \tag{15.11}$$

が求められることからも分かるように，応力テンソルと変位の関係は変分原理から導けるのである．(15.11) 式は右辺を σ_{ik} と書くと

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\tau_{ik} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\tau\delta_{ik}\right) \tag{15.12}$$

$$\sigma = \frac{1}{2\mu}\left(\tau - \frac{3\lambda}{3\lambda+2\mu}\tau\right) = \frac{\tau}{3\lambda+2\mu} \tag{15.13}$$

であり，

$$\tau_{ik} = 2\mu\sigma_{ik} + \lambda\sigma\delta_{ik} \tag{15.14}$$

であることが分かる．この結果は，(13.8) 式と一致している．

§ 16.　ヤング率：ポアソン比

理論の立場から導入された定数 λ, μ は簡単に測定される量とはいえない．Young (1807) は，円筒状の棹に荷重 Q を加えたときの弾性膨張を観測した．棹の長さを l とし，断面積を q とするとき

$$\frac{Q}{q} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{16.1}$$

が成り立っていることが分かった．E がヤング率である．Poisson (1819) は，棹の伸び Δl には，円筒半径の収縮

$$-\frac{\Delta r}{r} \div \frac{\Delta l}{l} = \sigma \tag{16.2}$$

が伴うことを示した．Lame の定数 λ, μ はヤング率 E と σ に関係している：

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\sigma}, \ \lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \tag{16.3}$$

§ 17. 弾性的安定性

弾性構造物をハンマーで叩いたとする．このとき理論上は低周波数から無限大の周波数をもった系に固有の振動が励起されるであろう．弾性構造物のポテンシャル・エネルギーは常に正定値であり最小値も正であるから，固有値はみな正のものだけが許される．荷重を増していくと，振動数は低い方に移っていくことが観測されるであろう．荷重が臨界値に達すると最低周波数はゼロになり，それを越えると負の値をとることになる．このことは 3 角関数が指数関数に変わることを意味する．平衡状態の周りでの振動運動が最低エネルギー状態から高いエネルギーの状態に不可逆的に変わったのである．弾性構造物がこのように突然に新しい構造に変わることが「ゆがみ」である．ゆがみの現象は，線型領域の弾性理論では解明できない．なぜなら，ラグランジュの関数は荷重によって固有値を変化させる項を含んでいないからである．しかし，歪みテンソルの値が大きくなっても 2 次形式のラグランジュの関数は，そのまま使えしかも非線型領域での弾性を論じることができる．この場合には弾性エネルギーは正定値に留まるだけでなく，外部から小さな摂動を加えたとき（ハンマーで叩くこと）の摂動のエネルギーは変位に関して 2 次であり，摂動をうけた方程式は線型である．しかし，新しいラグランジュの関数は非摂動ラグランジュの関数と同じではない．非摂動ラグランジュの関数が正定値であれば摂動をうけたラグランジュの関数も正定値である．荷重が小さな変位に対する摂動エネル

ギーがゼロになる値にまで大きくなると，弾性構造物は安定さを失い別の形状のものに「潰れる」であろう．これが，弾性構造物が突然に倒壊する理由である．これは，弾性限界を越えた結果と見ることもできる．現実の構造物では，変位に関する方程式が強い非線型性を持っているからこのような突然の変化が見られる．ゆがみの数学的理論の難しさは，主に大きな弾性変位に関して未解決の問題に関係している．

〈文　献〉

Condon, E. U., and Odishaw, H., eds, *Hondbook of Physics*, Part 3, Mechanics of Deformable Bodies(McGrow-Hill, 1958).

Sechler, E. E., *Elasticity in Engineering*(John Wiley & Sons, 1952).

Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity* (McGraw-Hill, 1946).

Timoshenko, S., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*(McGraw-Hill, 1951).

§ 18.　電磁気学．数学的手段

Einstein の時間の相対性と Minkowski の4次元ユークリッド空間（第4成分を $x_4 = ict$ とする．第9章 § 3）での特殊相対理論の定式化の重要性に照らしてみると，ベクトルやテンソルを4次元に拡張する必要がある．これからは総和はいつも1から4までとると約束する．「自然単位」では光速は1にとるので，$x_4 = it$ と置く．

マックスウエルの電磁気学（1873年）は，4次元ユークリッド空間でのテンソル解析を使って定式化することができる．弾性論の場合と異なり基本的な場の量 F_{ik}

$$F_{ik} = \partial\phi_k/\partial x_i - \partial\phi_i/\partial x_k \tag{18.1}$$

は，反対称テンソルである．4元ベクトル ϕ_i の空間成分は，「変位」と解釈することはできない（もっとも，Maxwell の時代にはこのように解釈していた）けれども電磁気学の基本的量の一つであるベクトル場である．これには，力学的意味は付与されない．

§ 19. マックスウエル方程式

ラグランジュの関数

$$L = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}\right)^2-J_i\phi_i \tag{19.1}$$

について考察する．ここで J_i は「4元電流」であり，変数 x_i の関数であるとする．ϕ_i に関する変分から，場の方程式

$$\partial F_{ik}/\partial x_k = J_i \tag{19.2}$$

が得られる．F_{ik} は反対称テンソル場であるから，この式の両辺に $\partial/\partial x_i$ を作用させると左辺はゼロになる．すなわち，4元電流 J_i は

$$\partial J_i/\partial x_i = 0 \tag{19.3}$$

を満たしている．この方程式（質量保存則との類似で）は電荷の保存則を表している．

ϕ_i はスカラー場の微分としてしか F_{ik} の表式に現れないので次のような条件（ローレンツの条件，1905年）

$$\partial\phi_i/\partial x_i = 0 \tag{19.4}$$

を課すことができる．この条件では，(19.2) 式は

$$\Delta\phi_i = -J_i \tag{19.5}$$

と書かれる．ϕ_i は「4元ベクトル・ポテンシャル」である．(19.5) 式で

$$\Delta = \partial^2/\partial x_k^2 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{19.6}$$

と定義された（単位速度の）波動演算子である．

ハミルトン形式の変分原理は，ラグランジュの関数を

$$L = F_{ik}^2/4-J_i\phi_i \tag{19.7}$$

と置き，これに付加条件

$$\partial\phi_k/\partial x_i-\partial\phi_i/\partial x_k-F_{ik} = 0 \tag{19.8}$$

を考慮することで定式化される．ラグランジュの未定係数を $\tau_{ik}/2$ と置くと，新しいラグランジュの関数は

$$L' = \frac{1}{4}F_{ik}^2-J_i\phi_i+\frac{1}{2}\tau_{ik}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}-F_{ik}\right) \tag{19.9}$$

であたえられる．ここで F_{ik} を消去すると

$$\frac{1}{2}F_{ik}-\frac{1}{2}\tau_{ik} = 0 \tag{19.10}$$

$$L' = \frac{1}{2}\tau_{ik}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}\right)-H \tag{19.11}$$

が得られる．ただし，

$$H = \frac{1}{2}\tau_{ik}F_{ik}-\frac{1}{4}F_{ik}{}^2+J_i\phi_i = \frac{1}{4}\tau_{ik}{}^2+J_i\phi_i \tag{19.12}$$

と置いた．ϕ_i の変分からは

$$\partial\tau_{ik}/\partial x_k = J_i \tag{19.13}$$

が導出される．また，τ_{ik} の変分からは

$$\partial\phi_k/\partial x_i-\partial\phi_i/\partial x_k-\tau_{ik} = 0 \tag{19.14}$$

が求められる．これらの連立1階微分方程式は，2階微分方程式 (19.5) と同等である．場の強さ τ_{ik} がベクトル・ポテンシャルを用いて定義されることは，変分原理の帰結である．

Maxwell は，相対性理論の考え方を用いたのではなく，通常のベクトルとテンソルだけを用いて電磁気学を定式化したことはいうまでもない．4元ポテンシャル ϕ_i をベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ に分解し，4元電流の方も電流密度 $\boldsymbol{j}$ と電荷密度 ρ に分解する：

$$\begin{aligned}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) &= (A_1, A_2, A_3, i\Phi)\\ (J_1, J_2, J_3, J_4) &= (j_1, j_2, j_3, i\rho)\end{aligned} \tag{19.15}$$

さらに，反対称テンソル $F_{ik} = \tau_{ik}$（独立な成分の数は6個）は，二つのベクトル $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ で置き換える：

$$\begin{aligned}F_{14} &= -iE_1, \quad F_{24} = -iE_2, \quad F_{34} = -iE_3\\ F_{12} &= H_3, \quad F_{23} = H_1, \quad F_{31} = H_2\end{aligned} \tag{19.16}$$

これらの記号を用いると，(19.13) 式は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}\\ &\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\rho\end{aligned} \tag{19.17}$$

と書き直され，(19.14) 式は

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H} = 0$$

$$\operatorname{grad}\Phi+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{E} = 0 \qquad (19.18)$$

となる．マックスウエル方程式の第2の組

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0 \qquad (19.19)$$

を利用して，上記の方程式から $\boldsymbol{A}$ と Φを消去することができる．計8個の方程式，(19.17) と (19.18)，は Lorentz が著書『電子論』(1895) に載せたマックスウエル方程式である．

マックスウエル理論は電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を用いて構成されているから，マックスウエル方程式を4元ポテンシャルを用いず変分原理から導出できるかどうかは一つの問題であった．実際，6個の物理量の変分から8個の方程式を求めることは原理的に不可能であり，通常の変分理論からはマックスウエル方程式は導出できない．しかし，発散 (div) に関係する二つの方程式を除けば，(19.17)式で右辺をゼロと置いた二つのベクトル方程式は，ラグランジュの関数

$$L = \boldsymbol{F}^{*}(\partial \boldsymbol{F}/i\partial t-\operatorname{curl}\boldsymbol{F}) \qquad (19.20)$$

から導出できることは大変興味深いことである．ここで

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H}+\mathrm{i}\,\boldsymbol{E}$$

である．星印（*）は複素共役を意味する．変分原理から得られる方程式は

$$\partial \boldsymbol{F}/i\partial t-\operatorname{curl}\boldsymbol{F} = 0$$

であり，(これに div$\boldsymbol{F}$ を加える) この方程式が8個のマックスウエル方程式である．

§ 20. ネーターの原理

質点力学において，作用変数に関してであろうと独立変数に関してであろうとラグランジュの関数を不変に保つ無限小変換から保存則が必然的に導出できるという Noether (1918) の原理がある（付録 II）．ここではこのアイデアに沿って運動量，エネルギー，角運動量の保存則を導いてみよう．偏微分方程式論にもネーターの原理は適用できることであり実際に今日でも用いられてい

る．2，3の重要な例に絞ってこの原理の適用の仕方について述べる．

マックスウエル方程式

(19.1)式であたえられるラグランジュの関数において ϕ_i を $\phi_i+\partial\alpha/\partial x_i$ で置き換えても第1項は不変である．この α は新しい場の変数と見なすことができる．その結果，ラグランジュの関数には

$$-J_i\partial\alpha/\partial x_i$$

が追加される．α に関する変分をとることで

$$\partial J_i/\partial x_i = 0 \tag{20.1}$$

が得られる．これは電荷保存則に他ならない．この方程式は電磁場の方程式の組み合わせによって求めておいたが，ここでは一つの原理，ネーターの原理の帰結として得られた．

次に，(19.20) 式であたえられるラグランジュの関数について考えてみよう．この関数は，$\boldsymbol{F}$ を $e^{i\alpha}\boldsymbol{F}$ で置き換えても不変である．α が無限小である場合を考えると，この変換は

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\,(1+i\alpha) \tag{20.2}$$

と書ける．さらに，α は場の変数であると考えると新しいラグランジュの関数は

$$L' = L+\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}\frac{\partial i\alpha}{i\partial t}+i\,\mathrm{grad}\,\alpha\cdot(\boldsymbol{F}^*\times\boldsymbol{F}) \tag{20.3}$$

であたえられる．α の変分から得られる方程式は

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^*\cdot\boldsymbol{F})}{\partial t}+i\,\mathrm{div}(\boldsymbol{F}^*\times\boldsymbol{F}) = 0 \tag{20.4}$$

である．$\boldsymbol{F}$ の定義に戻すとこの方程式は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)}{\partial t}+\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = 0 \tag{20.5}$$

と書かれる．これは真空中での電磁場エネルギーの保存則である．

Schrödinger 方程式

Schrödinger 方程式は，ラグランジュの関数

$$L=\psi^*\left(\frac{\partial\psi}{i\partial t}+V\psi\right)+\frac{1}{2_m}\text{grad}\,\psi^*\cdot\text{grad}\,\psi \tag{20.6}$$

から導ける（$h/2\pi = 1$ とする単位系を用いた）．このラグランジュの関数は無限小変換

$$\overline{\psi} = \psi\ (1+i\alpha) \tag{20.7}$$

に関して不変である．ここでも α を場の変数と見なすと，新しいラグランジュの関数は

$$L' = L+\psi^*\psi\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{i}{2m}\text{grad}\,\alpha(\psi\,\text{grad}\,\psi^*-\psi^*\text{grad}\,\psi) \tag{20.8}$$

であたえられる．α の変分から

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)+\text{div}\frac{i}{2m}(\psi\,\text{grad}\,\psi^*-\psi^*\text{grad}\,\psi) = 0 \tag{20.9}$$

が得られる．これが Schrödinger 理論における電荷の確率密度保存の方程式である．

一般に場の変換において無限小パラメータ α がラグランジュの関数に含まれないなら，α を新しい場の変数と見なしてオイラー・ラングランジュの方程式を求めると

$$\partial\rho/\partial t+\text{div}A = 0 \tag{20.10}$$

の形式にまとめられる．この方程式は，密度 ρ，流れ A の保存則である．

§ 21. 座標変換

ネーターの原理は作用変数を不変に保つ座標変換にも適用することができる．ラグランジュの関数には一つの座標 x_i（マックスウエル方程式の場合の 4 元電流 J_i がこの例に当たる，(*19.1*) 式を参照）が含まれていないと仮定する．直交座標系 x_i から無限小変換

$$\overline{x_i} = x_i+\varepsilon\xi_i(x_1,\ \cdots,\ x_4) \tag{21.1}$$

により曲線座標系 x_i に移し，ラグランジュの関数は x_i の関数であると見なす．この変換で微分演算子は次のように変換される：

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_k} = \left(\delta_{\alpha k}+\varepsilon\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha} \tag{21.2}$$

体積要素は

$$d\tau_4 = d\tau_4'\left(1-\varepsilon\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) \tag{21.3}$$

に従って変換される．したがって，無限小変換 (21.1) による作用積分の変分は

$$\int L'(\bar{x}_i)d\tau_4' = \int L d\tau_4+\varepsilon\int\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{i,\alpha}}\phi_{i,\,k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_\alpha}-L\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)d\tau_4 \tag{21.4}$$

である．ここで

$$\phi_{i,\,\alpha} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha}$$

と置いた．

ξ_k を場の変数と見なして変分原理を活用することもできる．ξ_k の変分から保存則

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{i,\alpha}}\phi_{i,\,k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \tag{21.5}$$

が導出される．この式は

$$\partial t_{ik}/\partial x_k = 0 \tag{21.6}$$

と書くこともできる．ただし，

$$t_{ik} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{\alpha,k}}\phi_{\alpha,\,i}-L\delta_{ik} \tag{21.7}$$

次に，次元数は1と仮定し，x_i としては $x_4 = t$ だけとする．したがって，$i = k = 4$ であるからテンソル (21.7) は

$$t_{44} = \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha}\phi_\alpha-L \tag{21.8}$$

であたえられる一成分だけになる．これは質点力学の全エネルギー H として見覚えのある量である．(21.6) 式は

$$dt_{44}/dt = 0 \tag{21.9}$$

であり，これはエネルギー保存則である．質点力学ではエネルギー保存則は時間 t の変換でラグランジュの関数が不変であることに関係してネーターの原理

を適用した結果であると見なすことができる．一方，運動量保存則は座標原点の変位に関する不変性から導かれる．(*21.6*) 式は運動量（$i = 1, 2, 3$）とエネルギー（$i = 4$）の保存則である．

例題として，ニュートンの重力理論について考えてみよう．重力のスカラーポテンシャル ϕ は，真空中のラプラス方程式

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{21.10}$$

を満たしている．この方程式を特殊相対論の要請と一致するように

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{21.11}$$

と書いておく．これは，相対論の要請から重力（自然界のどんな力も同様に）光速で伝播することを表している．この方程式のラグランジュの関数は

$$L = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2 \tag{21.12}$$

であたえられる．

(*21.7*) 式は，

$$t_{ik} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_m}\right)^2\delta_{ik} \tag{21.13}$$

をあたえる．この t_{ik} は対称テンソル（$t_{ik} = t_{ki}$）であるが，このことは決して一般性のあることではない点に注意しておこう．(*21.7*) 式で定義されるテンソルは「正準エネルギー運動量テンソル」(Pauli, 1920) と呼ばれる．

§ 22.　対称エネルギー運動量テンソル

テンソル (*21.7*) を導くにあたって，座標変換を利用したが場の変数 ϕ_i の方は変換しなかった．このことは，場の変数 ϕ_i はスカラー量であると考えて無限小変換を考えたことに相当する．しかし，この方法は必ずしも物理的状況に合致したものではない．場を対象とする理論では座標変換に伴って一定の規則に従って変換されるベクトルやテンソル（ときには，スピノール）も考えなければならない．テンソルやスピノールの成分は確かにスカラーであるが，それらをスカラー量のごとくに扱うことは許されない．こうした理由から，多くの場

合に見落とされがちであるが「正準エネルギー運動量テンソル」の導き方には疑問が残っている．例えば，Einstein は，一般相対論において10個の計量テンソル成分が場の変数であるにもかかわらず，公式 (21.7) を用いて重力場のエネルギー運動量テンソルを定義している．

特殊相対論の要請に従って，ラグランジュの関数は任意のローレンツ変換不変量であると仮定する．すなわち，ラグランジュの関数は4次元回転に関して不変であるとする．この節の目的からは，無限小回転を考えておくだけで十分である．

今度は二つの効果が問題になる．一つは，微分演算 $\partial\phi_i/\partial x_k$ に現れる変化（これに体積要素の無限小変化が加わる）であり，もう一つは場の変数 ϕ_i 自身の変化である．後者の変換規則は，ϕ_i の性質（スカラー，テンソル，スピノール性）に依存して決まる．いずれの場合にも成立する変換の一般的形式は

$$\phi_i = \bar{\phi}_i + \varepsilon\rho_{imjk}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}\bar{\phi}_m \tag{22.1}$$

である．ρ_{imjk} は定数である．$\partial\phi_i/\partial x_k$ の変換には2次微分 $\partial^2\xi_j/\partial x_\alpha\partial x_\beta$ が現れる．その結果，変換されたラグランジュの関数 L' は

$$L' = L+\varepsilon\left(A_{ik}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+B_{ikm}\frac{\partial^2\xi_m}{\partial x_i\partial x_k}-L\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\right) \tag{22.2}$$

の形式をとる．ここで，A_{ik} とB_{ikm} は ϕ_i と $\partial\phi_i/\partial x_k$ の関数である．(22.2) 式の括弧内の第1項は，対称部分と非対称部分に分解できる：

$$\varepsilon A_{ik}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} = \frac{\varepsilon}{4}(A_{ik}+A_{ki})\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\varepsilon}{4}(A_{ik}-A_{ki})\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\right) \tag{22.3}$$

ここで，右辺の

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}-\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\right) \tag{22.4}$$

は，座標系の無限小回転を表す．したがって，座標系の回転に関してラグランジュの関数は不変であるという要請から，(22.3) 式の右辺の第2項はゼロでなければならない．このことから，(22.2) 式における A_{ik} と B_{ikm} はともに i と

k に関しては対称であるとすることが許される.

ξ_i の変分からは，保存則

$$\partial T_{ik}/\partial x_k = 0 \tag{22.5}$$

が導出される．ここで

$$-T_{ik} = A_{ik} - L\delta_{ik} - \frac{\partial B_{\alpha ki}}{\partial x_\alpha} \tag{22.6}$$

と定義した．右辺の最後の項は i, k に関して対称ではない．そこで，これを次のように修正することを考えよう：

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(B_{\alpha ki} + B_{\alpha ik} - B_{ki\alpha}) \tag{22.7}$$

これならば，i, k に関する対称性は保たれている．そのうえ，x_k での微分をとると第2項と第3項の寄与は α と k について反対称であることから打ち消されていることが分かる．

したがって，ローレンツ不変なラグランジュの関数から定義される対称テンソルは

$$-T_{ik} = A_{ik} - L\delta_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(B_{\alpha ki} + B_{\alpha ik} - B_{ki\alpha}) \tag{22.8}$$

であることになる．この量の発散（div）はゼロである．これが，対称エネルギー運動量テンソルである．物理的なテンソルは（21.13）式で定義される量ではなくてこちらである．

例題として真空中のマックスウエル場について考察しよう：

$$L = (\partial\phi_i/\partial x_k - \partial\phi_k/\partial x_i)^2 \tag{22.9}$$

無限小変換（21.1）の下でベクトル場 ϕ_i は次のように変換される：

$$\phi_i = \overline{\phi}_i + \varepsilon\overline{\phi}_\alpha\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i} \tag{22.10}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial\overline{\phi}_i}{\partial x_k} + \varepsilon\left(\frac{\partial\overline{\phi}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{\phi}_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i}\right) + \varepsilon\overline{\phi}_\alpha\frac{\partial^2\xi_\alpha}{\partial x_i\partial x_k} \tag{22.11}$$

これを反映して，電磁場の強さ（18.1）は次のように変換される：

$$F_{ki} = \overline{F}_{ki} + \varepsilon\left(F_{\alpha i}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_k} - F_{\alpha k}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i}\right) \tag{22.12}$$

したがって，

$$L' = L+\frac{\varepsilon}{2}F_{ki}\left(F_{\alpha i}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_k}-F_{\alpha k}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i}\right)-L\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

$$= L+\varepsilon F_{i\alpha}F_{k\alpha}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}{}^2\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i} \tag{22.13}$$

が得られる．この式と (22.2) 式とを比較して

$$A_{ik} = F_{i\alpha}F_{k\alpha}$$

であることが分かるが，F_{ik} に負の記号をつけて定義しておいたから，B_{ikm} は現れない（もし，F_{ik} を対称テンソルと仮定したならば (22.13) 式には F_{ik} の1階微分が現れてくるであろう）．

対称テンソル

$$T_{ik} = -F_{i\alpha}F_{k\alpha}+F_{\alpha\beta}{}^2\delta_{ik}/4 \tag{22.14}$$

は Maxwell (1873) が求めた電磁場のエネルギー運動量テンソルである．

一般に，(22.8) 式に現れたテンソル A_{ik}, B_{ikm} を具体的に求めて整理してみると，(21.7) 式で定義された正準エネルギー運動量テンソル t_{ik} と (22.8) 式で定義した対称エネルギー運動量テンソル T_{ik} の間には

$$-T_{ik} = t_{ik}+\frac{\partial}{\partial x_m}(\sigma_{mik}+\sigma_{imk}+\sigma_{kmi})$$

$$= \frac{1}{2}(t_{ik}+t_{ki})+\frac{\partial}{\partial x_m}(\sigma_{imk}+\sigma_{kmi}) \tag{22.15}$$

なる関係があることが分かる．ここで

$$\sigma_{ikm} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha,i}}\phi_\beta(\rho_{\alpha\beta km}-\rho_{\alpha\beta mk}) \tag{22.16}$$

と置いた（物理的なエネルギー運動量テンソルは，T_{ik} に等しくなくても比例してさえおればよい．比例定数はエネルギーの単位の採り方とエネルギー密度 T_{44} が正であるという条件で決まる）．

§ 23.　10個の保存則

保存則 (22.5) の体積積分にガウスの定理 (3.1) を利用すると

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\int T_{k4}d\tau+\int T_{k\alpha}n_{\alpha}dS = 0 \qquad (23.1)$$

が得られる．孤立した物理系，すなわち，面積分がゼロになる系（したがって，境界面を通過するエネルギーや運動量の流れなし）では

$$P_k = i\int T_{k4}d\tau = 一定 \qquad (k = 1, 2, 3) \qquad (23.2)$$

が導かれる．これは全運動量が保存されることを表している．同様にして，

$$E = \int T_{44}d\tau = 一定 \qquad (23.3)$$

が得られる．これは全エネルギーが保存されることを表す．T_{ik} が対称テンソルでなかった場合には，これ以外の保存則は導出できない．しかし，対称テンソルである場合にはさらに 6 個の保存則が導ける：

$$\partial(x_iT_{jk}-x_jT_{ik}) /\partial x_k = 0 \qquad (23.4)$$

この方程式から（孤立した物理系に限ってみると）時間的に変化しない 6 個の物理量が求められる：

$$\int(x_kT_{j4}-x_jT_{k4})d\tau = 一定 \qquad (23.5)$$

ここで，j, k = 1, 2, 3 とすると，角運動量の保存則が得られる．k = 1, 2, 3，j = 4 とするとさらに 3 個の保存則

$$\int x_kT_{44}d\tau-it\int T_{k4} = 0 \qquad (23.6)$$

が導ける．ここで，エネルギーの重心を

$$\xi_k = \frac{\int x_kT_{44}d\tau}{\int T_{44}d\tau} \qquad (23.7)$$

で定義してみると，(23.6) 式は

$$E\xi_k-tP_k = 0 \qquad (23.8)$$

あるいは

$$P_k = Ed\xi_k/dt \qquad (23.9)$$

と書ける．こうして，ニュートンの定義と同様に運動量の力学的定義（「力学系

の全運動量は全エネルギーとエネルギーの重心の速度との積に等しい」）が得られる．

ニュートンはエネルギーの代わりに質量という概念を用いた．「質量」を「エネルギー」という用語で置き換えてみると，Einstein が相対性理論から導かれた質量とエネルギーの同等性（$c = 1$ とする単位系で）に完全に一致している．アインシュタインの原理が場の理論の立場から解釈できるのは，対称エネルギー運動量テンソルの場合に限られることに気付いたのは Planck (1909) であった．もし T_{i4}（運動量密度）と T_{4i}（エネルギーの流れ）とが一致しないならば，質量保存とエネルギー保存とは別々の法則ということになって $mc^2 = E$ とした原理も成り立たなかったであろう．対称でないエネルギー運動量テンソルを用いて展開するなら，孤立系の質量の中心に関する慣性の法則も成り立たなかったであろう．

§ 24.　力学法則の場の理論的導出

今度は孤立系でなく境界を通しての運動量とエネルギーの流れがゼロではない系について考える．注目している物理系は外界と相互作用しているから，運動量とエネルギーの保存則は

$$\frac{dP_k}{dt} = -\int T_{k\alpha} n_\alpha dS \qquad (k,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3) \tag{24.1}$$

$$\frac{dE}{idt} = -\int T_{4\alpha} n_\alpha dS \tag{24.2}$$

で表される．第1の方程式はニュートンの運動法則であり，「運動量の時間変化の割合は作用している力に等しい」ということを表している．外力は境界での面積分

$$F_k = -\int T_{k\alpha} n_\alpha dS \tag{24.3}$$

で表される．質量中心が静止している座標系を用いることにすると，運動方程式は「質量×加速度は作用している力に等しい」の形式に表される．

場の理論的に運動法則を導出する方法の利点は次の点にあることが理解され

るであろう．われわれが扱う場はほとんどの場合線型場である．このことは重ね合わせの原理が成り立っていて場の間にはどのような力学的相互作用も存在しないことを意味している．それと同時に，場の量では空間の点が発散する特異点になっている．場の間の力学的相互作用が存在すれば，場の量は線型でもなければこのような特異点も持たないであろう．ラグランジュの関数も単純な２次形式ではなくて，物質粒子の芯の近傍で重要になるに違いない高次の項を含むであろう．こうした高次の項の効果について何も分かっていない間は，場の線型方程式の右辺にわれわれの知識を越えたある非線型項からの寄与を付け加えなければならない（Einstin の asylum ignorantiae［無知の隠れ屋］）．幸いなことにこのような領域は非常に小さく，素粒子の内部構造を問題にするとき以外は問題にしなくてよい．

積分形式の保存則の持つ利点は，境界積分 (*24.3*) を線型場近似が許される領域にまで拡大できる点にある．したがって，原理的には線型近似の成り立つ領域での知識から粒子に作用している力を求めることができることになる．例えば，マックスウエル理論では，瞬間的な静止座標系での粒子の運動法則は

$$m_0\frac{d^2\xi_k}{dt^2} = eE_k$$

と書ける．e は電荷の大きさであり，E_k は電場の強さである．この方程式を運動している座標系に変換すると

$$m_0\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} = e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})$$

が得られる．右辺の力は「ローレンツ力」である．しかし，このようにして得られた方程式も絶対的に正しいわけではない．ローレンツ力は，面積分 (*24.3*) を用いて計算される電子の内部場と外場の相互作用に関係する力である．内部場自身の自己相互作用に関係した力も存在する．ニュートン力学では，「反作用の法則」が成り立っているから内部力は互いに打ち消しあっていて自己場は自分自身と相互作用することはできない．こうしたことも，もし電磁相互作用の伝播速度が有限であることを考慮にいれる必要のあるときにはもはや成り立たない．内部場の自分自身への反作用の大きさを計算するためには粒子の内部構造がよく分かっていなければならない．

〈文　献〉

Jauch, J. M., and Rohrlich, R., *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Reading, 1955).

Lanczos, C., "Variational Principles," in R. C. Clark and G. H. Derick, eds., *Mathematical Methods in Solid State Physics and Superfluid Theory* (Oliver & Boyd, Edinburgh, 1969).

Roman, P., *Theory of Elementary Particles* (North-Holland, Amsterdam, 1960).

Wentzel, G., *Quantum Theory of Fields* (Interscience, New York, 1949).

〔付録 I〕

ラグランジュの形式から ハミルトンの形式へ

ルジャンドル変換を用いなくても，ラグランジュの未定係数法に基づいてラグランジュの形式からハミルトンの形式に変換することは可能である．ラグランジュの関数が $L = L(q_1, \cdots, q_n ; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n ; t)$ であたえられた場合について考えてみよう．変数 q_i を独立変数の第2の組として扱う場合を考え，

$$L = L(q_1, \cdots, q_n ; \omega_1, \cdots, \omega_n ; t) \tag{1}$$

と書くことにする．このことは，条件

$$\dot{q}_i - \omega_i = 0 \tag{2}$$

を補助条件として置きさえすれば可能である．補助条件を考慮して，ω_i を元の変数に置き換えると元の問題に戻ることは明らかなので新しい定式化は元の問題と同等である．

ここで今度はラグランジュの未定係数法を利用することにし，ラグランジュの関数を

$$L' = L + \Sigma p_i(\dot{q}_i - \omega_i) \tag{3}$$

と改める．ここで，ラグランジュの未定係数を p_i と置いた．新しい問題では3組の変数，q_i, p_i, ω_i が独立変数である．しかし，変数 ω_i は代数的であって微分形は含まれていない点に注意しておこう．このような性質の変数はあらかじめ消去しておいてよい（第5章 問題12）．変数の消去はある関係が実現される運動においても仮想変位された運動においても同じように成り立っていることを意味する．変分は両端ではゼロとしなければならないのでこのことは一般には許されない．しかし，代数的に入ってきているだけの変数に関しては部分積分を考える必要がなく両端での変分に対する条件は考慮しなくてもよい．したがって，代数的な変数ならばあらかじめ消去しておいてもかまわない．

方程式

$$\partial L'/\partial \omega_i = 0 \tag{4}$$

を使って，変数 ω_i を消去することは，方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} - p_i = 0 \tag{5}$$

を ω_i について解かなければならないことを意味している．しかし，このことは方程式

$$\partial L / \partial \dot{q}_i = p_i \tag{6}$$

を $\dot{q}_i$ に関して解き，p_i と q_i の関数として表すことと全く同じである．

新しいラグランジュの関数 L' は

$$H = \Sigma p_i \omega_i - L(q_\alpha, \omega_\alpha; t) \tag{7}$$

を用いると

$$L' = \Sigma p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) \tag{8}$$

と書ける．変数 ω_i は結局は消去されることになるから，方程式 (6) を用いて $\dot{q}_i$ を消去しなければならないという条件の下で

$$H = \Sigma p_i \dot{q}_i - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) \tag{9}$$

を定義することができる．これが，ラグランジュ形式の問題をハミルトン形式の問題に翻訳する方法である．

これと逆の展開も可能である．(8) 式のハミルトンの関数において p_i は代数的変数であるからあらかじめ消去しておくことができ，ハミルトンの形式から出発してラグランジュの形式に変換することができる．このことは，方程式

$$\frac{\partial L'}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \tag{10}$$

を解いて変数 p_i を q_i と $\dot{q}_i$ の関数として表さなければならないことを意味している．p_i を代入して L' を q_i と $\dot{q}_i$ の関数として表すと元のラグランジュの関数 L が求められる．こうして変換の双対性が理解できたけれども，ここではラグランジュの未定係数法を用いて展開した．

この方法には高階微分を含む変分問題を第 6 章 § 4 に示した消去法を用いなくても正準形式に変換できるという別の利点がある．例として，ラグランジュの関数が

$$L = L(y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, \overset{(n)}{y}; t) \tag{11}$$

であたえられている場合について考察しよう．まず，

$$y = q_1, \ \dot{q}_1 = q_2, \ \cdots, \ \dot{q}_n = q_{n+1} \tag{12}$$

$$L' = L(q_1, q_2, \cdots, q_{n+1}; t)$$
$$+p_1(\dot{q}_1-q_2)+p_2(\dot{q}_2-q_3)+\cdots+p_n(\dot{q}_n-q_{n+1}) \quad (13)$$

としよう．これは

$$L' = \Sigma p_i\dot{q}_i-H \quad (14)$$

$$H = p_1q_2+p_2q_3+\cdots+p_nq_{n+1}-L(q_1, \cdots, q_{n+1}; t) \quad (15)$$

と書ける．q_{n+1} だけが条件

$$\partial L/\partial q_{n+1} = p_n \quad (16)$$

を用いて消去しなければならない変数ということになる．こうして n 対の変数 $q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n$ による 1 階微分の正準形式が得られる．

〔付録Ⅱ〕

ネーターの不変変分問題

代数学者 Emmy Noether は一群の変分問題に関係した重要な結論を見出した．1918年の彼女の論文は相対論と量子論を含む場の物理学に計り知れない影響を及ぼした．通常は違ったふうに説明されているが，ネーター理論は循環変数の理論の応用であると理解することができる．Noether は独立変数にも従属変数にも適用されるある変換群に関して不変な作用積分を持つ変分問題を考察した．彼女は，変換のすべてのパラメータに関連して保存則が導かれることを証明した．具体的には，無限小変換群について考えれば十分である．

ネーターの方法を解説するために，まずはじめに，ラグランジュの関数が時間を陽に含んでいない力学系に対するエネルギーの保存則の導出について考えてみよう．そのためには，独立変数 t を

$$t = t'+\alpha \tag{1}$$

のように変換する．ここで α は無限小の定数である．この変換によって変数 $q_i\ (t)$ は変化するけれども，しかし新しい変数 t' の関数と見なすことにする．そうするとラグランジュの関数は

$$L = L(q_i,\ q'_i,\ t'+\alpha) \tag{2}$$

と書くことができる．しかし，L は t に陽には依存していないと仮定しよう．この場合の変分問題の作用積分は

$$A = \int_{t_1-\alpha}^{t_2-\alpha} L(q_i,\ q_i')dt' \tag{3}$$

となる．この変分問題では，積分の上下限の他に定数 α は現れてこない．こうして Noether が考察したタイプの変分問題の例題が作れた．

次に，α が定数であるという仮定を変えて α はt' の関数であるとしよう．境界条件は

$$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = 0 \tag{4}$$

とする．この場合には，作用積分は α の関数になるけれども，$\alpha'(t')$ だけが積分に陽に現れるであろう．今度は

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt'}(1-\alpha') \tag{5}$$

と書かなくてはならないし，新しいラグランジュの関数は

$$L(q_i,\ \dot{q}_i) = L(q_i,\ q_i'(1-\alpha'))$$

$$= L(q_i,\ q_i') - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\alpha' \tag{6}$$

となる（$\alpha(t')$ は無限小であるとした）．さらに

$$dt = (1+\alpha')dt' \tag{7}$$

である．したがって，$\alpha(t')$ の1次まで残した新しい作用積分は

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\ q_i')dt' - \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)\alpha' dt' \tag{8}$$

と書かれる．

変換 (*1*) によって変分問題が変わったのではなかったし，作用積分をこのように新しい形式に書いたとしても元の作用積分以上に多くの情報が含まれていることは期待できない．しかし，新しい形式 (*8*) には変数 $q_i(t')$ のグループに加えるべき一つの自由度 $\alpha(t')$ が存在する．$\alpha(t')$ に関係するラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt'}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0 \tag{9}$$

であり，これは

$$\Sigma p_i\dot{q}_i - L = E \tag{10}$$

であり，古典力学のエネルギー保存則に他ならない．これはラグランジュの方程式に追加される種類の方程式ではなくラグランジュの方程式からの結論であり，作用積分を不変に保つ変換にネーターの原理を用いて導出された式である．第2の例題として「並進不変性」を持つラグランジュの関数について考えてみよう．直交座標系 x_i, y_i, z_i を用いることとし，力学系のポテンシャル・エネルギーは位置座標の差の関数であるとする：

$$V = V(x_i-x_k,\ y_i-y_k,\ z_i-z_k) \tag{11}$$

（この仮定はニュートンの第3法則：「作用反作用の法則」を満たす）．この場合変換

$$x_i = x_i' + \alpha,\ y_i = y_i' + \beta,\ z_i = z_i' + \gamma \tag{12}$$

によっては力学系のポテンシャル・エネルギーも運動エネルギーも変化しない．ただし，α, β, γ は定数とする．これも変換によって不変に保たれる作用積分の例である（この場合には，変換は力学変数に適用され，(12) の変換は座標系の並進を表している）．

再び定数 α, β, γ が時間 t に依存しているとして，変分問題の新しい自由度に追加してみよう．追加された自由度はポテンシャル・エネルギーには寄与しないけれども，運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i[(\dot{x}_i' + \dot{\alpha})^2 + (\dot{y}_i' + \dot{\beta})^2 + (\dot{z}_i' + \dot{\gamma})^2] \tag{13}$$

となり，もし α, β, γ が無限小であるとするならば，

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} Ldt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i\dot{\alpha} + \dot{y}_i\dot{\beta} + \dot{z}_i\dot{\gamma})dt \tag{14}$$

が得られる．新しい変数 α, β, γ に関係するラグランジュの方程式は

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i = c_1$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{y}_i = c_2 \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{z}_i = c_3$$

であたえられる．これらの方程式は「運動量の保存」を表している．

第3の例題として「回転不変性」を持ったラグランジュの関数について考察してみよう．ポテンシャル・エネルギー V が「中心力」によるものであるとすると，V は粒子間距離

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \tag{16}$$

にだけ依存する．この力学系では座標系の並進だけでなく回転に関してもポテ

ンシャル・エネルギーも運動エネルギーも不変であるからネーターの原理が適用できる．座標系の無限小回転は，ベクトル記号を用いて表すと次のように書ける：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{17}$$

ただし，Ω は無限小のベクトルである．再び Ω は時間 t の関数であるとすると，ポテンシャル・エネルギーは Ω に依存しないが運動エネルギーの方は，

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_i')^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i' + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) \tag{18}$$

となる．こうして三つの自由度が変分問題に追加される．ベクトル Ω に関係したラグランジュの方程式は

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \overline{\boldsymbol{M}} = \text{一定} \tag{19}$$

となり，角運動量の保存則が得られる．これは中心力の力学系に適用される保存則である（天体の運動に適用すれば，ケプラーの面積則が得られる）．

索　　引

（五十音順）

▷あ　行◁

▷か　行◁

▷さ　行◁

▷た　行◁

▷な　行◁

▷は　行◁

▷ま 行◁

▷や 行◁

▷ら 行◁

▷わ 行◁

▷欧 文◁

監訳者・訳者紹介

・監訳者

高橋　康　（たかはし　やすし）

1951 年　名古屋大学理学部卒業
現　在　アルバータ大学名誉教授
主要著書　量子力学を学ぶための解析力学入門（講談社）
統計力学入門（講談社）
初等相対性理論（講談社）
古典場から量子場への道（講談社）
物性研究者のための場の量子論Ⅰ，Ⅱ（講談社）など.

・訳　者

一　柳　正　和　（いちやなぎ　まさかず）

1965 年　大阪大学大学院（修士）修了
1971 年　理学博士
現　在　長崎総合科学大学教授
主要著書　統計力学概説（小倉淑と共訳，オーム社）

解析力学と変分原理　NDC 423.35

1992 年 8 月 28 日　初版 1 刷発行

原著者　Cornelius Lanczos
監訳者　高　橋　康
訳　者　一　柳　正　和
発行者　藤　吉　敏　生
発行所　日　刊　工　業　新　聞　社
東京都千代田区九段北一丁目 8 番 10 号
（郵便番号 102）
電　話　東 京（3222）7111
振替口座　東京 9-186076

製　作　㈱日刊工業出版プロダクション
組版・印刷　美研プリンティング㈱
製　本　松栄堂製本所

1992 Printed in Japan
ISBN4-526-03176-3